2. Разложения идеалов

Напоминание: $I, J \trianglelefteq A$ вз. просты, если $I + J = A$.

<u>Т.1</u> (Китайская теорема об остатках – КТО). Пусть идеалы $J_1, \dots, J_n$ кольца B попарно вз. просты, $J_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{n} J_i$.

Тогда $J_0 = J_1 \cdot \ldots \cdot J_n$ и $B/J_0 \cong B/J_1 \oplus \ldots \oplus B/J_n$.

$$\overset{\shortparallel}{\{(b_1 + J_1, \dots, b_n + J_n) \mid b_i \in B\}}$$

с покомпон. операциями $+$ и $\cdot$.

<u>Д-во:</u>

Индукция по n. При $n = 1$, очевидно.

Пусть $n = 2$. Т.к. $J_1 + J_2 = B \Rightarrow \exists q_1 \in J_1,\ q_2 \in J_2 :\ q_1 + q_2 = 1$.

$J_1 \cdot J_2 \subseteq J_0 = J_1 \cap J_2$ по опр-ю идеала. Пусть $c \in J_0$. Тогда

$$c = c \cdot 1 = \underset{\substack{\cap \\ J_2 \cdot J_1}}{cq_1} + \underset{\substack{\cap \\ J_1 \cdot J_2}}{cq_2} \in J_1 \cdot J_2 \Rightarrow J_0 = J_1 \cdot J_2.$$

Р-м от-е

$\varphi: B \to B/J_1 \oplus B/J_2$, $\varphi(b) = (b+J_1, b+J_2)$. Очевидно, что $\operatorname{Ker}\varphi = J_1 \cap J_2 = J_0$. Кроме того, $\varphi(a_1) = (J_1, a_1+J_2) = (J_1, 1+J_2) = (\bar{0}, \bar{1})$. Аналогично, $\varphi(a_2) = (\bar{1}, \bar{0}) \Rightarrow \varphi$ – сюръекция

Пусть $n > 2$. Тогда $\exists\, a_i \in J_1$ и $b_i \in J_i$, $i = 2, \dots n$: $a_i + b_i = 1$.

Тогда $1 = \prod_{i=2}^{n} (a_i + b_i) \in J_1 + J_2 \dots J_n$. Отсюда, $B = J_1 + J_2 \dots J_n$, т.е. идеалы J_1 и $J = J_2 \dots J_n$ вз. прост. В силу индукц. предположения и доказанного при $n = 2$ имеем

$J_1 \dots J_n = J_1 \cdot J = J_1 \cap J = J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_n = J_0$ и

$B/J_0 = B/J_1 J \simeq B/J_1 \oplus B/J \simeq B/J_1 \oplus B/J_2 \oplus \dots \oplus B/J_n$ ∎

Лемма 1 Пусть идеалы I, J кольца A вз. просты, $s \le r$.

Тогда $$I^sJ \big/ I^r \cap I^sJ \simeq I^s \big/ I^r.$$

т.к. $s = r$ очевидно $\Rightarrow$ считаем, что $s < r$

Д-во: $I^sJ \subseteq I^s$

$x \overset{\tau}{\longmapsto} x + I^r$ – гом. ЗМ из I^sJ в I^s/I^r, $x \in I^sJ$.

$\operatorname{Ker} \tau = I^r \cap I^sJ$, очевидно. Д-ем, что τ – сюръекция.
I^{r-s} и J вз. просты по лемме 2.1.2 из ANT4 $\Rightarrow \exists y \in I^{r-s}$ и $z \in J$: $1 = y + z$. Тогда $\forall a \in I^s \Rightarrow a = a \cdot 1 = \underset{\in I^r}{a \cdot y} + \underset{\in I^s \cdot J}{a \cdot z}$

$\Rightarrow az = a - \underset{\in I^r}{ay} \Rightarrow \tau(az) = a + I^r \Rightarrow \tau$ – сюръекция ■

Лемма 2 A – нётерово кольцо. Любой ненул. собств идеал содержит произведение ненул. простых идеалов.

1-во: Предположим противное. Тогда сущ. идеал J, максимальный с условием J не содержит произведения простых идеалов. Т.к. сам J, очевидно, не прост, то $\exists\, a_1, a_2 \in A \setminus J$ т.ч. $a_1 \cdot a_2 \in J$. Положим $I_k = J + Aa_k$, $k=1,2$.

Тогда для $k=1,2$, имеем $I_k \trianglelefteq A$ и $I_k \supset J$, но $I_k \neq J$.
Кроме того, $J \supseteq I_1 \cdot I_2$. В частности, $I_k \neq A$, $k \neq 1,2$.

В силу макс. J, и I_1 и I_2 содержат произведения простых идеалов. Но тогда $J \supseteq I_1 \cdot I_2$ тоже содержит, противоречие.

Т. 2 (о разл. идеалов дедекиндова кольца) "ОТА дед. колец"

Пусть A — дедекиндово кольцо, $0 \neq I \underset{\neq}{\trianglelefteq} A$. Тогда $I = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$, где p_i — простые идеалы, $r_i \geq 1$. Наборы $\{p_1, \ldots p_n\}$ и $\{r_1 \ldots r_n\}$ определены однозначно.

Д-во: Существование. В силу леммы 2 идеал I содержит идеал, кот. яви-ся произведением простых.

Пусть $I \supseteq I_0 = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$ – максим. с таким условием, где $p_i, i = 1..n$, – простые идеалы, причём $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$.

Заметим, что p_i и p_j вз. просты, т.к. они макс. в силу дедекиндовости A. Мы докажем, что $I = I_0$.

В силу т. 1 (КТО) $A/I_0 \cong A/p_1^{r_1} \oplus \dots \oplus A/p_n^{r_n}$.

где из-зм $\varphi: x + I_0 \to (x + p_1^{r_1}, \dots x + p_n^{r_n})$

$I_0 \subseteq I \trianglelefteq A \Rightarrow I/I_0 \trianglelefteq A/I_0$, причём образ I/I_0 при изоморфизме φ – это $I/I_0 = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} I_j$, где $I_j = I/p_j^{r_j} \cap I$.

Но $I_j = I/_{p_j^{r_j}} \cap I \simeq I + p_j^{r_j} / p_j^{r_j} \trianglelefteq A/_{p_j^{r_j}}$

В силу следствия из т. 2.1.2 (ANT4) $I_j \simeq p_j^{s_j} / p_j^{r_j}$

для некот. $s_j \leq r_j$. Сл-но, $p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n} = I_0 \subseteq I' = p_1^{s_1} \ldots p_n^{s_n}$

Имеем $I'/I_0 = p_1^{s_1} \ldots p_n^{s_n} / p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n} \underset{\text{лемма 1}}{\simeq} \bigoplus_{j=1}^{n} p_j^{s_j} / p_j^{r_j} = \bigoplus_{j=1}^{n} I_j = I/I_0$

Значит, $I' = I$ (их образы I/I_0 и I'/I_0 совпадают)

$\Rightarrow I = p_1^{s_1} \ldots p_n^{s_n} = I_0$ в силу макс. I_0.

<u>Однозначность</u> Если простой идеал $p \in \{p_1 \ldots p_n\}$,

то $I \subseteq p$. А-им обратное. Пусть $I \subseteq p$, где p - простой

Если $p \notin \{p_1 \ldots p_n\}$, то p и I взаимно просты $\Rightarrow$

$\underset{\substack{\uparrow \\ I}}{1 = x} + \underset{\substack{\cap \\ p}}{y} \in p$, противоречие $\Rightarrow \{p_1 \ldots p_n\} = \{p \underset{\text{пр.}}{\trianglelefteq} A \mid I \subseteq p\}$.

опр. по однозначно.

Осталось показать однозначность $r_1 \ldots r_n$. Пусть для опр-сти $p = p_1$ и $q = p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n}$. Т.к. p и q вз. просты

$1 = \underset{\in p}{x} + \underset{\in q}{y} \Rightarrow y = 1 - x$ обратим в локализации $A_p \Rightarrow$

$q \cdot A_p = A_p$. Далее, $I \subseteq p \Rightarrow I \cap (A \setminus p) = \emptyset \Rightarrow$ однозн.

определен идеал $J \trianglelefteq A_p$: $IA_p = J$. Но A_p — локальное

дедекиндово $\Rightarrow IA_p = p^r A_p$ для некот. $r \in \mathbb{N}$.

Имеем $IA_p = p_1^{r_1} q \cdot A_p = p_1^{r_1} A_p = p^r A_p \Rightarrow r = r_1$

определён однозначно. Аналогично для $j = 2, \ldots n$ $\blacksquare$

Следствие 1 Если A — факториальное дедекиндово, то A — обл. главных идеалов.

Д-во: Пусть $I \trianglelefteq A$. В силу т. 1 $I = \mathfrak{p}_1^{r_1} \dots \mathfrak{p}_n^{r_n}$, где $\mathfrak{p}_i$ — простые. Если $\mathfrak{p}_i = x_i A$ — главный, то $I = x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} A$ — тоже. А то, что простой идеал в факт. дедекин. кольце главный следует из предл. 2.7.2 из ANT4. ∎

Следствие 2 Если A — дедекиндово с конечным числом простых идеалов, то A — область гл. идеалов.

Д-во: Как и выше достаточно док-ть, что все простые идеалы — главные. Пусть $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ — все разл. простые идеалы в A.

В силу однозн. разложения в т. 1 $p_1^2 \neq p_1 \Rightarrow \exists x_1 \in p_1 \setminus p_1^2$

В силу КТО $A/p_1^2 p_2 \dots p_n \overset{\varphi}{\cong} A/p_1^2 \oplus A/p_2 \oplus \dots \oplus A/p_n$.

Поэтому $\exists x \in A : \varphi(x) = (x_1 + p_1^2, 1 + p_2, \dots, 1 + p_n)$

Тогда $x \in p_1 \setminus p_1^2$, т.к. $x - x_1 \in p_1^2$, $x \notin p_j$, $j = 2 \dots n$.

Пусть $I = (x)$. По т. 1 он разл. на простые.

Т.к. $I \not\subseteq p_j$, $j = 2, \dots, n$, $I = p_1^r$. Т.к. $I \not\subseteq p_1^2 \Rightarrow I = p_1$

$\Rightarrow p_1 = (x)$ – главный. Аналогично для др. простых.

<u>Пример</u> (Упр 1) Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = A$ – дедекиндово,

идеал $I = (2)$ не прост, идеал $p = (2, 1 + \sqrt{-5})$ прост,

$I = p^2$ – разложение (2) на простые. Док-ть!