

3. Дробные идеалы

Опр 1 Пусть A — целостного кольца, $K = Q(A)$ — его поле частных. Ненулевой A -подмодуль I в K наз-ся **дробным идеалом** кольца A , если найдется ненулевой $d \in A$ такой, что $dI \subseteq A$. Э-т d — **элемент** дробного идеала I . Мн-во всех дробных идеалов — $Id(A)$.

Примеры. ① $0 \neq I \leq A \Rightarrow I \in Id(A)$ гл $d = 1$.

I — **целый** идеал.

② $x = \frac{a}{b} \in K = Q(A) \Rightarrow I = xA \in Id(A)$ с $d = b$.

$I = (x) = xA$ — **главный** дробный идеал. Мн-во всех главных дробных идеалов — $P(A)$. / $\frac{\text{чл 1 } Id(x)}{= P(x)} = \frac{a}{b}x = \frac{a}{b}x, \frac{a}{b} \in Q$

Презн. 1 (св-ва идеальных идеалов) Пусть $I, J \in \text{Id}(A)$.

1) I — к.и. A -модуль

2) $I+J, I \cap J, I \cdot J \in \text{Id}(A)$

3) $I^* = \{x \in Q(A) \mid xI \subseteq A\} \in \text{Id}(A)$

4) $I \cdot I^* \in \text{Id}(A)$

Д-во: 1) $dI \subseteq A$. Так A -регулярно $\Rightarrow dI = (dx_1 \dots dx_n)$

$\forall x \in I \quad dx = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$, так A -свн. идеал-субмодуль $\neq 0 \Rightarrow x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \Rightarrow I = Ax_1 + \dots + Ax_n$ — к.и. как A -модуль

2) $d_1 I \subseteq A, d_2 J \subseteq A \Rightarrow d_1 d_2 (I * J) \subseteq A$, где $* \in \{+, \cap, \cdot\}$ — к.и., $I * J$ — идеал.

Отметим, что $I+J \neq 0 \neq I \cdot J \Rightarrow I \cap J \supseteq I \cdot J \neq 0$ т.е.

Будем использовать

3) Пусть $x, y \in I^* = \{x \in Q(A) \mid xI \subseteq A\}$, $a \in A$.

Тогда $x+y \in I^*$ и $(ax)I = a(xI) \subseteq A \Rightarrow I^* \cdot A$ содержится

в I — т.е. $\exists d \neq 0 \in I \cap A$ (он ненулевой) $\Rightarrow I^* \cdot \text{подмодуль}$
у лева.

4) Р. и с. идеалы сущи, тогда A — с. и. у лева.

Тогда $dI = xA$ где $x \neq 0 \in A \Rightarrow I = \frac{x}{d}A$ — т.е. с. и. у лева
 $\Rightarrow \frac{d}{x} \in I^* \Rightarrow 1 = \frac{x}{d} \cdot \frac{d}{x} \in I \cdot I^* \Rightarrow II^* = A$.

Обратно сущи: Допустим $A \neq I \cdot I^* \Rightarrow II^* \subsetneq A$.

Тогда мы найдем $P \subsetneq A$: $II^* \subseteq P$.

Переход к локализации A_p по идеалу I . То т.2.2.1
из лемм A_p - кольцо частных A_p (т.е. в A_p обрат.
имеет каждый элемент $\neq 0$)

$$\text{У нас } A \subset A_p \subset \bigcup_{I, I^*} Q(A) = Q(A_p)$$

IA_p, I^*A_p - идеалы в A_p (с теми же
знаменателями)

$$\Delta\text{-е.н.н. } (IA_p)^* = I^*A_p$$

$$\supseteq: (I^*A_p)(IA_p) = (I^*I)A_p \subseteq AA_p = A_p.$$

$$\subseteq: \text{Так } x \in (IA_p)^*, \text{ т.е. } x(IA_p) \subseteq A_p \Rightarrow xI \subseteq A_p \Leftrightarrow$$

$$xx_i \in A_p \quad \forall i=1 \dots n, \text{ где } I = Ax_1 + \dots + Ax_n \text{ (I - к.н. н.н.)}$$

$$xx_i = \frac{a_i}{s_i} \in A_P, a_i \in A, s_i \in S = A \setminus P \quad \forall i=1..n.$$

$$\text{Таким образом } (x s_1 \dots s_n) x_i = a_i s_1 \dots s_n \in A \Rightarrow x s_1 \dots s_n \in I^* \Rightarrow$$

$$x \in \frac{1}{s_1 \dots s_n} I^* \subseteq I^* A_P.$$

$$\text{Таким образом } A_P \text{ — кольцо частных элементов, } A_P = I A_P \cdot I^* A_P, \text{ то}$$

$$A \neq I I^* \Rightarrow A_P \neq I I^* A_P = I A_P I^* A_P, \text{ что противоречит } \square$$

Т.1 Мно-во $\text{Id}(A)$ простых идеалов является идеалом кольца A образует свободную абелеву группу по умножению с мно-вом всех ненулевых простых идеалов в качестве базиса (используя мн-во $P(A)$ ненулевых простых идеалов — образующих в $\text{Id}(A)$).

1-во: $I_1, I_2 \in \text{Id}(A) \Rightarrow I_1 I_2 \in \text{Id}(A)$ - и.2 операц.

ассоц $\Leftarrow$ ассоц в $Q(A)$

комм $\Leftarrow$ комм в $Q(A)$

Есть $e_A: A \in \text{Id}(A)$, т.е. $I \cdot A = A \cdot I = I$

Опр: $I^{-1} = I^*$ в смысле ум. 3-4 операц.

Если $xA, yA \in P(A) \Rightarrow (xA)(yA) = xyA \in P(A)$

$Q(A) \ni x, y \neq 0$

$(xA)^* = x^{-1}A \in P(A)$

Тогда $P(A) \leq \text{Id}(A)$. Остало г-н, что

$\text{Id}(A)$ свободна. Пусть $I \in \text{Id}(A)$ и д-зи-м I ,

т.е. $dI \nsubseteq A$. По теореме 2.2.2 (ОТА) имеем

$\Delta dI = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$ u $\Delta d = dA = p_1^{s_1} \dots p_n^{s_n}$, zgl $p_1 \dots p_n$ -
 upocine wogeler δA , $r_i, s_i \geq 0$. U meen

$$\begin{aligned}
 dI &= (d) \cdot I \Rightarrow I = I \cdot (d)(d)^* = (dI)(d^*) = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n} (p_1^+)^{s_1} \dots (p_n^+)^{s_n} \\
 &= p_1^{r_1 - s_1} \dots p_n^{r_n - s_n}, \text{ zgl } p^{-u} := (p^*)^u
 \end{aligned}$$

Oguzn-cu pazomewend: tyer $gn \neq I \in Id(A)$:

$$I = p_1^{t_1} \dots p_n^{t_n} = p_1^{u_1} \dots p_n^{u_n}, t_i, u_i \in \mathbb{Z}. \text{ Bwsepen } a_i \geq 0$$

Tak, u to $t_i + a_i$ u $u_i + a_i \geq 0 \forall i=1 \dots n$. Torgz

$$J = I \cdot p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n} = p_1^{t_1 + a_1} \dots p_n^{t_n + a_n} = p_1^{u_1 + a_1} \dots p_n^{u_n + a_n}. \text{ t.v. } J \triangleq A$$

No r. 2.7.2. $t_i + a_i = u_i + a_i \forall i=1 \dots n \Rightarrow t_i = u_i$ $\square$

Опр 2 Фактор-группа $\text{Id}(A) / \rho(A) = \mathcal{C}(A)$ — группа классов $\text{Kласс } A \text{ } A$.

Следствие 1 Теорема А — гомоморфизма кольца. Сл. усл.-связки:

- (1) $|\mathcal{C}(A)| = 1$
- (2) А — обн. правых идеалов
- (3) А факторкольцо

Л-во: (1) $\Rightarrow$ (2) очевидно из опр-и.

(2) $\Rightarrow$ (3) (к-во смежности) Кольцо вычетов: $\text{Нётрость} \Rightarrow \text{рзв.}$

$\forall$ непр. $p \in A \Rightarrow p$ — ρ -простой $\Rightarrow$ А факторкольцо
 $A - (p)$ т. о. 1 из АНТО,

(3) $\Rightarrow$ (2) - следствие 1 из т. 2.2.2 (ОТА)

(2) $\Rightarrow$ (1) Если $I \in \text{Id}(A)$, то $A \supset dI = Aa$, $a \in A \Rightarrow$

$$I = A\left(\frac{a}{a}\right) \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow |\mathcal{Q}(A)| = 1. \quad \begin{matrix} \uparrow \\ A-\text{PID} \end{matrix} \quad \square$$

Если K -ант. числовое поле, то число $h_K = |\mathcal{Q}(\mathcal{O}_K)|$

наз-ся **числом классов** поля K .

Следствие 2 Если K -ант. числовое поле, то СТУ

(1) $h_K = 1$ (2) $\mathcal{O}_K$ - вых. н. идеал (3) $\mathcal{O}_K$ факториально.

Таким образом, вопрос о факториальности $\mathcal{O}_K$ сводят к проверке тривальности группы классов.