# 5. Норма идеала

Если $L/K$ - кон. расширение полей, то для $\forall x \in L$ опр-на норма $N_{L/K}(x) = \det([\rho^x])$, где $\rho^x : y \mapsto xy$ - оператор левого сдвига в в.п. $L$ над $K$.

Пусть $AKLB$, где $A$ - дедекиндово. Мы хотим опр-ть норму для любого $I \in Id(B)$, т.е гом-зм $N : Id(B) \to Id(A)$ так, чтобы $N_{L/K}(x)A = N(xB)$ $\forall x \in L^*$, т.е. норма главного дробного идеала, порожд. эл-том $x \in L^*$, совпадала с нормой эл-та $x$.

В силу того, что $Id(B)$ - своб. абелева группа с базисом, сост. из простых идеалов кольца $B$, дост. опр-ть норму на простых идеалах из $B$.

Опр 1. Пусть $A \subset K \subset L \supset B$, $A$ - дедекиндово, $0 \neq P$ - простой идеал в $B$.

Идеал в $A$ $N(P) = p^{f(P/p)}$, где $p = P \cap A \trianglelefteq A$, наз-ся нормой простого идеала $P$ из $B$. Для произв. дробного идеала $I = P_1^{e_1} \ldots P_g^{e_g} \in Id(B)$ получаем $N(I) = p_1^{e_1 f_1} \ldots p_g^{e_g f_g}$, где $p_i = P_i \cap A$, $f_i = f(P_i/p_i)$. От-е $N: Id(B) \to Id(A)$ - гом-зм.

Предл. 1 (Св-ва нормы идеала) Пусть $A \subset K \subset L \supset B$, $A$-дед. Тогда

1) $N(IB) = I^n$, где $n = [L:K]$, $\forall I \trianglelefteq A$,

2) Если $L/K$ - РАСШ. Галуа, то $\forall \underset{\text{прост.}}{P \overset{\neq 0}{\trianglelefteq}} B$ и разл. $pB = (P_1 \ldots P_g)^e$, где $p = P \cap A$, вып-ся $N(P)B = (P_1 \ldots P_g)^{ef} = \prod\limits_{\sigma \in Gal(L/K)} \sigma(P)$.

Д-во: 1) Пусть сначала $I = p \trianglelefteq_{\text{прост.}} A$. Имеем $pB = P_1^{e_1} \ldots P_g^{e_g}$, $P_i$ – простые ненул. идеалы в $B$.

Для $\forall i$ $P_i \cap A = p$ (лемма 2.4.1 из ANT 7) $\Rightarrow N(P_i) = p^{f_i}$, где $f_i = f(P_i/p) = [B/P_i : A/p]$. Поэтому

$$N(pB) = N(P_1^{e_1} \ldots P_g^{e_g}) \underset{\uparrow}{=} N(P_1)^{e_1} \ldots N(P_g)^{e_g} = p^{\sum f_i e_i} = p^n$$

в силу т. 2.4.1 о фундам. тождестве из ANT 7.

Если $0 \neq I \trianglelefteq A$ – произв., то $I = p_1^{s_1} \ldots p_e^{s_e}$, $p_i \trianglelefteq_{\text{прост.}} A \Rightarrow$

$$IB = (p_1 B)^{s_1} \ldots (p_e B)^{s_e} \Rightarrow N(IB) = N(p_1 B)^{s_1} \ldots N(p_e B)^{s_e} =$$

$$= (p_1^n)^{s_1} \ldots (p_e^n)^{s_e} = (p_1^{s_1} \ldots p_e^{s_e})^n = I^n,$$ ч.т.д.

2) Т.к. $L/K$ – расш. Галуа, по т. 2.4.1. имеем $N(P)B = (pB)^f = (P_1 \ldots P_g)^{ef}$. Кроме того, (см. д-во т. 2.4.1) $G = Gal(L/K)$ действует транзитивно на мн-ве $\{P_1, \ldots, P_g\}$, которое вкл. в себя идеал $P$ (т.к. $pB \subseteq P$), т.е. $\{P_1 \ldots P_g\}$ – орбита $P^G$. Поскольку длина орбит $= g$, а $|G| = n = g \cdot (fe)$, то порядок стабилизатора $G_{P_i} = fe$ $\forall i = 1 \ldots g$. Сл-но,

$$\prod_{\sigma \in G} \sigma(P) = P_1^{ef} \ldots P_g^{ef} = N(P)B \quad \blacksquare$$

<u>Лемма 1</u> (транзитивность нормы идеала) Пусть $AKLB$, $E/L$ – кон. сеп. расш. и $C = \overline{A}^E$. Тогда $N^{E/L}(I) = N^{L/K}(N^{E/L}(I))$ $\forall I \in Id(C)$

Д-во: В силу транз. целости $C = \overline{A}^E = \overline{B}^E$.
Достаточно проверить для просто идеала $t \trianglelefteq C$.
Пусть $q = t \cap B \triangleleft B$ и $p = t \cap A = q \cap A \trianglelefteq A$. По опр-ю
$N^{E/L}(t) = q^{m_1}$ и $N^{L/K}(q) = p^{m_2}$, где $m_1 = |C/t : B/q|$
и $m_2 = |B/q : A/p|$. Но $m = |C/t : A/p| = m_1 \cdot m_2$ и
$p = t \cap A \Rightarrow N^{E/K}(t) = p^m = (p^{m_2})^{m_1} = N^{L/K}(N^{E/L}(t))$ $\blacksquare$

T.1 (о связи норм идеала и эл-та) Пусть $AKLB$,
$x \in L^* = L \setminus \{0\}$. Тогда $N(xB) = N_{L/K}(x)A$.

Д-во: Достаточно док-ть для $x \in B$, т.к. $N_{L/K}$ и $N$
мультипликативны и $\forall x \in L^*$ $\exists c, d \in B$ : $x = \frac{c}{d}$.

Пусть $x \in B$ и $xB = P_1^{s_1} \cdots P_e^{s_e}$ — разложение на простые идеалы в $B$.

Обозн: $I = N(xB) = N(P_1)^{s_1} \cdots N(P_e)^{s_e} \trianglelefteq A \Rightarrow$

$IB = (N(P_1)B)^{s_1} \cdots (N(P_e)B)^{s_e} \trianglelefteq B$. На семинаре

д-ли, что $I_1B \neq I_2B \Leftrightarrow I_1 \neq I_2$. Сл-но, достаточно

д-ть, что $IB = aB$, где $a := N_{L/K}(x)$.

Пусть сначала $L/K$ — расш. Галуа. Тогда

$N(P_i)B = \prod_{\sigma \in G} \sigma(P_i)$, где $G = Gal(L/K)$. $\Rightarrow$

$$IB = \prod_{i=1}^{e} \Big(\prod_{\sigma \in G} \sigma(P_i)\Big)^{s_i} = \prod_{\sigma \in G} \Big(\prod_{i=1}^{e} \sigma(P_i)^{s_i}\Big) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(xB) =$$

$$= \Big(\prod_{\sigma \in G} \sigma(x)\Big) B = N_{L/K}(x) \cdot B$$

, что и требовалось д-ть.

предл. 1.3.3 из ANT 2.

Если $L/K$ не явл-ся расш. Галуа, то $\exists$ поле $E \supset L$ такое, что $E/K$ – расш. Галуа. Пусть $d = |E:L|$.

В силу п.1 предл.1 $N^{E/L}(IC) = I^d$. Т.к. $E/K$ – расш. Галуа имеем $N^{E/K}(\underset{IC}{\underset{\shortparallel}{x}}C) = N_{E/K}(x)A$. Кроме того,

$$N^{E/K}(IC) \underset{\text{транз.}}{=} N^{L/K}(N^{E/L}(IC)) = N^{L/K}(I^d) = N^{L/K}(xB)^d =$$

$E/K$-расш. Галуа $\Rightarrow$ $\shortparallel$ транз.

$$N_{E/K}(x)\cdot A \overset{\text{транз.}}{=} N_{L/K}(N_{E/L}(x))A \underset{x\in L}{=} N_{L/K}(x^d)A = (N_{L/K}(x)A)^d$$

Итак, $N^{L/K}(xB)^d = (N_{L/K}(x)A)^d$. Но $Id(A)$ – св. об. группа $\Rightarrow$ $y^d = z^d \Leftrightarrow y = z$ в ней $\Rightarrow$

$N^{L/K}(xB) = N_{L/K}(x)A$ ∎

Опр 2 Пусть $L$ — алг. числовое поле, $I \trianglelefteq \mathcal{O}_L$. Число

$\mathbb{N}(I) = |\mathcal{O}_L / I|$ — считающая норма идеала $I$.

Пример Если $L = \mathbb{Q}$ и $I = n\mathbb{Z}$, то $N(I) = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n < \infty$.

Оч-ся, считающая норма всегда конечна.

Т. 2 Пусть $L$ — алг. числовое поле, $I \trianglelefteq \mathcal{O}_L$. Тогда

1) $\mathbb{N}(I)$ конечна

2) $\mathbb{N}(I)\mathbb{Z} = N(I)$

3) $\forall$ пол. константы $C$ $\exists$ кон. число $I \trianglelefteq \mathcal{O}_L$ : $N(I) < C$.

Д-во: 1) пусть $I = P_1^{e_1} \ldots P_g^{e_g}$, $P_i \underset{\text{прос.}}{\trianglelefteq} \mathcal{O}_L$, $f_i = f(P_i / p_i)$

$p_i = P_i \cap \mathbb{Z} = p_i\mathbb{Z}$ — простой идеал в $\mathbb{Z}$. В силу доказанного в т. о фунд. тождестве,

$\dim_{(\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})} O_L/p_i^{e_i} = e_if_i < \infty \Rightarrow |O_L/p_i^{e_i}| = p_i^{e_if_i} < \infty.$

по КТО: $O_L/I \cong \bigoplus_{i=1}^{g} O_L/p_i^{e_i} \Rightarrow |O_L/I| = \prod_{i=1}^{g} p_i^{e_if_i} < \infty$

2) $N(I) = N(P_1)^{e_1} \ldots N(P_g)^{e_g}$

$N(P_i) = (p_i\mathbb{Z})^{f_i}$ $p_i$ - простые в $\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$N(I) = (p_1^{e_1f_1} \ldots p_g^{e_gf_g})\mathbb{Z} = |O_L/I|\mathbb{Z} = \mathbb{N}(I)\mathbb{Z}$

3) т.к. $\mathbb{N}(I) = \prod_{i=1}^{g} p_i^{e_if_i} \geq \prod_{i=1}^{g} p_i^{e_i}$ (т.к. $f_i \geq 1$) $\Rightarrow$

сущ. только кон. число наборов $p_i$ и $e_i$: $\mathbb{N}(I) < C$.

но $\forall p \in \mathbb{Z}$ $\exists$ менее кон. число $P \triangleleft O_L: P \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, т.к.

$$p\mathcal{O}_L = Q_1^{s_1} \cdots Q_\ell^{s_\ell} \quad u \quad P \in \{Q_1 \ldots Q_s\} \quad \blacksquare$$