Семинар 0 (06.02.2025):

1) Упр 2 из ANTO
2) Упр 3 из ANTO
3)* а) Описать все простые эл-ты в $\mathbb{Z}[i]$
б) используя а) найти и док-ть критерий представимости нат. числа в виде суммы двух квадратов

Семинар 1 (13.02.2025):

1) Пусть F - поле и $R = \{ f/g \mid f, g \in F[x_1 \dots x_n]$ и $g(a) \neq 0 \}$, где $a = const \in F^n$. Д-те, что R локально.

2) F - поле, $\{R_i\}_i$ - семейство целозамкн. подколец R_i в F. Д-те, что $\cap R_i$ целозамкнуто

3) $d \in \mathbb{Z}$ свободное от квадратов. $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$
Д-те, что при $d \equiv 1 (4)$ R не явл-ся целозамкнутым

4*) Док-ть, что в кольце $\mathbb{Z}[x]$ простыми эл-ми явл-ся мн-ны

а) $f(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_n) - 1$, где c_i — разл. целые числа

б) $g(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_n) + 1$, где c_i — разл. целые и $n > 4$

в) найти разл. не простые $g(x)$ из б) не простые, если $n \le 4$

Семинар 2 (20.02.2025):

1) Упр 2 из лекции ANT2

2) Пусть $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{-5}]$, $\beta = \sqrt{2} + \sqrt{-5}$. Найти $\chi^{\beta}_{E/\mathbb{Q}}(t)$ и $\chi^{\beta}_{E/\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]}(t)$.

3)* $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$. Найти все обратимые эл-ты в $\mathbb{Z}[\varepsilon]$.

Семинар 3 (27.02.2025)

1) Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$ своб. от кв-ов. Тогда $\mathbb{Q}[\sqrt{m}] \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{n}] \iff m = n$.

2) Найти $\operatorname{disc}\left(\mathbb{Q}[\varepsilon]/\mathbb{Q}\right)$, где ε — прим. корень $x^3 = 1$.

3) Упр 2 из лекции ANT 3

4)* Упр 3 из лекции ANT 3.

Семинар 4 (06.03.2025)

1) Будут ли дедекиндовыми кольца

а) $\mathbb{Z}$ б) $\mathbb{Q}$ в) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ г) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

д) $\overline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{C}}$ – целое замыкание $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{C}$

е) $F[x^2, x^3]$, где F – поле ?

2) Пусть A – обл. целостности, L – кон. расш. $K = Q(A)$, $B = \overline{A}^L$ – целое зам. A в L. Если S – мультипл. мн-во в A, то $B_S = \overline{A_S}^L$, т.е локализация B_S – целое замыкание локализации A_S в L.

3)* Прочитать §2.4 и 2.5 в гл. 6 [КоС 1] о дискр. и результанте двух мн-нов

4) При каких значениях λ

a) мн-ны $t^3 - \lambda t + 2$ и $t^2 + \lambda t + 2$ имеют общий корень?

b) мн-н $t^3 - 3t + \lambda$ имеет кратный корень?

5) Вычислить дискриминант мн-нов

a) $t^n + a$ b) $t^{n-1} + t^{n-2} + \ldots + t + 1$

Семинар 5 (13.03.2025)

1) Пусть A - дедекиндово, $K = Q(A)$, L - кон. сеп. расш. K
$B = \overline{A}^L$, $0 \neq I \underset{\neq}{\lhd} A \Rightarrow 0 \neq IB \underset{\neq}{\lhd} B$.

2) У-р 3 из ANT4

3) Найти целый базис в O_L, если $L = \mathbb{Q}[\theta]$, где θ - корень мн-на:

а) $t^3 + 3t^2 + 4t - 1$

б) $t^3 - t + 4$

в) $t^3 + 3t - 2$

4) Д-ть, что в $A_{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{C}}$ каждый простой идеал максимален

5*) Д-ть теорему Штиккельбергера: $\mathrm{disc}(O_L/\mathbb{Z}) \equiv 0, 1 \pmod 4$

Указания: а) пусть $x_1 \dots x_n$ — целый базис O_L, $\sigma_1 \dots \sigma_n$ — $\mathbb{Q}$-вложения L в $\mathbb{C}$, где $n = |L : \mathbb{Q}|$

Запишите $\mathrm{disc}(O_L/\mathbb{Z}) = \det(T(x_i x_j)) = \det(\sigma_i(x_j))$ как $P - N$, где P — слагаемые со „знаком плюс", N — слагаемые со „знаком минус"

б) д-те, что $P+N$, $PN \in \mathbb{Q}$

в) д-те, что $P+N$, $PN \in \mathbb{Z}$

г) завершите док-во