

Вопросы к экзамену по алгебраической теории чисел

Лектор: проф. А. В. Васильев

2 семестр, 2024-25 учебный год

1. Теорема Ферма для показателя 4 и метод бесконечного спуска.
2. Локальное кольцо, критерий локальности. Мультипликативное множество, локализация кольца. Теорема о соответствии простых идеалов.
3. Целые элементы в расширении кольца и целые алгебраические числа. Целое замыкание кольца, свойства целой зависимости.
4. Определение целозамкнутости, целозамкнутость целого замыкания области целостности в своем поле частных и его следствие для алгебраических числовых полей. Теорема о целозамкнутости факториального кольца.
5. Норма и след, их элементарные свойства; транзитивность функции следа, связь с минимальным и характеристическим многочленами.
6. Норма и след: случай сепарабельного расширения, транзитивность нормы. Критерий сепарабельности расширения (без док-ва).
7. Теорема о целом базисе, целый базис алгебраического числового поля. Дискриминант набора элементов, теорема о вычислении дискриминанта (без док-ва).
8. Определение дедекиндова кольца. Дедекиндовость колец: кольца главных идеалов, и локализации дедекиндова кольца.
9. Определение дедекиндова кольца, дедекиндовость целого замыкания дедекиндова кольца в его поле частных.
10. Теорема о целозамкнутой нётеровой области целостности с единственным простым идеалом и структура идеала фактор-кольца дедекиндова кольца по степени простого идеала.
11. Взаимная простота идеалов и китайская теорема об остатках.
12. Основная теорема арифметики для дедекиндовых колец и ее следствия.
13. Дробные идеалы дедекиндова кольца и их свойства. Группа дробных идеалов и группа классов. Факториальность кольца целых алгебраического поля и число классов этого поля.
14. Разложение идеала в расширении, критерий вхождения простого идеала расширения в разложение. Индексы ветвления и инерции, фундаментальное тождество для разложения идеала в расширении и его частный случай для расширения Галуа.
15. Теорема Дедекинда–Куммера, критерий разветвляемости простого идеала в расширении (в условиях ТДК).
16. Норма идеала и ее свойства, транзитивность нормы идеала.
17. Теорема о связи норм главного идеала и элемента. Считающая норма идеала в кольце целых алгебраических чисел.
18. Квадратичные вычеты и невычеты конечного поля, множество квадратичных вычетов как ядро гомоморфизма. Символ Лежандра и его свойства.
19. Теорема Гаусса (квадратичный закон взаимности).
20. Решетка как дискретная подгруппа, полная решетка и ее объем, теорема Минковского (без док-ва). Объем полной решетки, натянутой на целый базис алгебраического числового поля через его дискриминантный идеал.

21. Оценка считающей нормы идеала. Теорема о конечности числа классов и ее следствия.

22. Критерий обратимости целого алгебраического числа; логарифмическое вложение группы единиц, его образ и ядро; теорема Дирихле (с частичным док-вом).

23. Круговые многочлены и их свойства; теорема о кольце целых кругового поля (случай $n = p$ — нечётное простое).

24. Единицы кольца целых кругового поля (случай $n = p^k > 2$).

25. Теорема Ферма для показателя 3.

26. Регулярные простые числа, теорема Ферма для регулярных простых показателей: первый случай (p не делит xuz).

27. Регулярные простые числа, теорема Ферма для регулярных простых показателей: второй случай (p делит xuz).