4 Группа единиц

Опр 1 Единица кольца A — обратимый элемент „unit" (not identity element)

O_L^* — группа единиц числ. алг. поля L.

Лемма 1 $x \in O_L$ обратим $\iff N_{L/\mathbb{Q}}(x) = \pm 1$

Д-во: $x \cdot x^{-1} = 1 \Rightarrow N(x)N(x^{-1}) = N(1) = 1$.

Но $N_{L/\mathbb{Q}}(x) \in \mathbb{Z}$ тк коэф-т $\mathrm{char}^{x}_{L/\mathbb{Q}}(t) \in \mathbb{Z}$ в силу следствия из т. 1.5.1 см. ANT 3 $\Rightarrow N(x) = \pm 1$.

Если $N_{L/\mathbb{Q}}(x) = \pm 1 \Rightarrow \mathrm{char}^{x}_{L/\mathbb{Q}}(t) = t^n + \dots + a_1 t + (-1)^n N_{L/\mathbb{Q}}(x)$

$\Rightarrow x(x^{n-1} + \dots + a_1 x) = \pm 1 \Rightarrow x \in O_L^*$ ■

Пусть $|L:\mathbb{Q}|=n$ и $\sigma_1 \ldots \sigma_r, \sigma_{r+1}, \overline{\sigma_{r+1}}, \ldots \sigma_{r+s}, \overline{\sigma_{r+s}}$ — $\mathbb{Q}$-вложения L в $\mathbb{C}$, среди которых только $\sigma_1 \ldots \sigma_r$ отобр. L в $\mathbb{R}$, т.е. $n=r+2s$.

Опр 2 Логарифмическое вложение $\ell: O_L^* \to \mathbb{R}^{r+s}$:

$$\ell(x)=(\ln|\sigma_1(x)|, \ldots, \ln|\sigma_r(x)|, \ln|\sigma_{r+1}(x)|, \ldots \ln|\sigma_{r+s}(x)|), x \in O_L^*$$

Лемма 2 $\ell: O_L^* \to \mathbb{R}^{r+s}$ — гом-зм групп. В частности, $\ell(O_L^*) \leq \mathbb{R}^{r+s}$.

Д-во: $\ell(xy)=\ell(x)+\ell(y)$ и $\ell(x^{-1})=-\ell(x)$ ∎
очевидно

Лемма 3 Пусть X — огран. подмн-во в $\mathbb{R}^{r+s}$. Тогда $X'=\{x \in O_L^* \mid \ell(x) \in X\}$ конечно.

Д-во: Т.к X конечно, $|\sigma_i(x)|<C$ $\forall x\in X'$, $i=1,\dots,r+s$, где C — некот. конст. Тогда зн-я элем. симм. мн-ов от $\sigma_i(x)$ для $x\in X'$ тоже ограничены константой C'. В силу следствия из т. 1.5.1 (АНТ3) для $x\in O_L^*$ коэф-ты мн-нов $\chi^x_{L/\mathbb{Q}}(t)$ и $\mu^x_{\mathbb{Q}}(t)$ — целые числа. Т.к эти коэф-ты $\chi^x_{L/\mathbb{Q}}(t)$ выр-ся через элем. сим. мн-ны от $\sigma_i(x)$, то при $x\in X'$ имеется только кон. число $\chi^x_{L/\mathbb{Q}}(t)$ $\Rightarrow$ имеется только кон. число их корней $\Rightarrow$ т.к x — корень $\chi^x_{L/\mathbb{Q}}(t)$, то таких x тоже кон. число.

Следствие 1. $\ell(O_L^*)$ — решётка в $\mathbb{R}^{r+s}$.

Д-во: В силу п. 2 $H = l(\mathcal{O}_L^*)$ — дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^{r+s}$ $\Rightarrow$ H — решётка (не обяз. полная) ∎
(Факт 3 из ANT10)

Следствие 2 $\mu_L := \ker l = \{x \in \mathcal{O}_L^* \mid x$ — корень из 1 в $L\}$ — конечная циклическая группа.

Д-во: Положим в п. 2 $X = \{0\}$. Имеем $\mu_L = \ker l = X'$ конечно. Т.к. μ_L — конечная подгруппа в поле L $\Rightarrow$ μ_L — циклическая (см., например, Винберг, Т. 9.17). По т. Лагранжа $\forall x \in \mu_L \ \exists m \geq 1: x^m = 1$. Пусть теперь $x \in \mathcal{O}_L^*$ и $\exists m \geq 1: x^m = 1$. Тогда $\forall i \ \sigma_i(x)^m = 1$.
$\Rightarrow |\sigma_i(x)^m| = |\sigma_i(x)|^m = 1 \Rightarrow |\sigma_i(x)| = 1 \Rightarrow x \in \ker l = \mu_L$. ∎

Т.1 (Дирихле) Пусть L – алг. числовое поле. Тогда $O_L^* \simeq \mathbb{Z}^{r+s-1} \times \mu_L$.

Д-во: Мы докажем только, что $O_L^* \simeq \mathbb{Z}^t \times \mu_L$, где $t \le r+s$. Действ-но, по следствию 1 из л. 2 $\ell(O_L^*) \simeq \mathbb{Z}^t$, $t \le r+s$, а по следствию 2 $\mu_L = \ker \ell$ – конечная группа.

Т.к. O_L^* – конечно-порожд. абелев группа, то $O_L^* \simeq \mathbb{Z}^m \times A$, где A – кон. группа, причём m опр-но однозначно. Имеем $\ell(O_L^*) \simeq O_L^*/\ker \ell \simeq O_L^*/\mu_L \simeq \mathbb{Z}^t$

$\Rightarrow m = t$ и $A \simeq \mu_L$ ∎

Зам. $t = r+s-1$ использует т. Минковского (см. Гударев).

Опр 3 Набор $u_1,\dots,u_{r+s-1} \in O_L^*$ т.ч. $\ell(u_1)\dots\ell(u_{r+s-1})$ — базис решетки $\ell(O_L^*)$ наз-ся набором основных единиц кольца O_L.

Утв 1 Д-ть, что

а) $O_L^* = \langle i \rangle$, $L = \mathbb{Q}(i)$, где i — мнимая единица.

б) $O_L^* = \{\pm \omega^i \mid i = 0,1,2\} \cong \{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1\}$, $L = \mathbb{Q}(\omega)$, где ω — прим. корень 3-ей степени.

в) $O_L^* \cong \mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

г) Получите результаты пп. а) б), используя только лемму 1 (без т. Дирихле).

Упр2 Пусть $m \in \mathbb{Z}$ – своб. от квадратов, $L = \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$

а) при $m < 0$ найти $\mathcal{O}_L^*$

б) при $m > 0$ указать способ, как искать $\mathcal{O}_L^*$

и найти $\mathcal{O}_L^*$ для всех $m \leq 17$.

Упр3. Пусть d – целое пол. число, своб. от кв-ов.

Д-ть, что ур-е Пелля $x^2 - dy^2 = 1$ имеет беск. много целоч. решений. Более того, $\exists$ решение (x_0, y_0) т.ч. любое другое решение имеет вид $\pm(x_n, y_n)$, где $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Гипотеза Ферма 1657, решение – Лагранж.

Упр4* Д-ть теорему Дирихле полностью.