3. Локализация

Напомним, что кольцо R локально, если в нем только один максим. идеал, а также критерий локальности: для $M \underset{max}{\trianglelefteq} R$, M единств. (R локально) $\Longleftrightarrow 1+x \in R^* \ \forall x \in M$ (см. п.1 в предыд. лекции).

Пусть R область целостности. Напомним, что тогда определено поле частных $Q(R)$ этого кольца, т.е. мн-во „дробей" $\frac{p}{q}$, где $p,q \in R$ $q \neq 0$ и $\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \Longleftrightarrow pb = qa$.
(см. детали в § 3.10 из [ВИН]).

<u>Примеры</u> $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$, $Q(\mathbb{F}[x]) = \mathbb{F}(x)$ - поле рац. ф-ций.

Если R факториально, то $\forall \underset{0 \neq b}{\frac{a}{b}} \in R \ \exists!$ несокр. $\frac{p}{q} = \frac{a/(a,b)}{b/(a,b)}$.
(напр., ОГИ)

$(\emptyset \neq) S \subseteq R$ — **мультипликативно**, если $ab \in S$ $\forall a, b \in S$.
Обычно предполагается, что $0 \notin S$.

<u>Примеры</u> 1) $R \setminus \{0\}$, 2) $\{1\}$. 3) $I \setminus \{0\}$, где $I \trianglelefteq R$.

<u>Лемма 1</u> Если $0 \notin S$ — мультипл. подмн-во области целостности R, то $R_S = \{f/g \mid g \in S\} \subseteq Q(R)$ — подкольцо в $Q(R)$.

<u>Д-во:</u> Простая проверка: $\frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'} = \frac{f \cdot f'}{g \cdot g'} \in R(S)$, т.к. $g \cdot g' \in S$.

<u>Примеры</u> $S = R \setminus \{0\} \Rightarrow R_S = Q(R)$, $S = \{1\} \Rightarrow R_S = R$.

<u>Опр 1</u> Кольцо R_S наз-ся **локализацией** кольца R относительно (мультипл.) мн-ва S.

Далее, удобно считать, что $1 \in S$. Тогда отобр-е $a \mapsto \frac{a}{1}$ — вложение R в R_S.

Напомним, что идеал I кольца R прост, если $\forall a, b \in R$ $ab \in I \Rightarrow a \in I$ или $b \in I$ (I прост $\Leftrightarrow R/I$ — обл. целостн.)

В частности, максим идеал всегда прост.

<u>Т. 1</u> Пусть R — обл. целостности, $S \subseteq R$ мультипликативно.

Тогда сущ-ет вз.-одн. соответствие между простыми идеалами в R, не пересекающимися с S, и простыми идеалами локализации R_S, где $p \mapsto \hat{p}_S = pR_S$.

<u>Д-во:</u> $\Rightarrow$) пусть p — простой идеал в R, $p \cap S = \emptyset$.

Пусть $q = \{\frac{a}{s} \mid a \in p, s \in S\} = pR_S$. Тогда $q \trianglelefteq R_S$.

Более того, q — простой. Дей-но, пусть $r = \frac{a}{s}$, $r' = \frac{a'}{s'} \in R_S$ и $\frac{\tilde{a}}{\tilde{s}} = r \cdot r' \in q$.

Тогда $\tilde{a} \in p \Rightarrow aa' \cdot \tilde{s} = ss' \tilde{a} \in p$. Т.к. $S \cap p = \emptyset$ и p-простой $\Rightarrow$

$aa' \in p \Rightarrow a \in p$ или $a' \in p \Rightarrow r$ или $r' \in q \Rightarrow q$ — простой.

Наконец, покажем, что $p = q \cap R$. Очевидно, что $p \subseteq q \cap R$.
Обратно, если $r \in q \cap R$, то $r = a/s \Rightarrow rs = a \in p$.
Т.к. $s \notin p$, то из простоты $p \Rightarrow r \in p$.

$\Leftarrow$) Пусть $q \trianglelefteq_{\text{прост}} R_S$. Положим $p = q \cap R$.
Тогда из простоты $q \Rightarrow p$ — простой идеал в R.
Ясно, что $p_S = pR_S \trianglelefteq R_S$ и $p_S \subseteq q$. Покажем, что
$q \subseteq p_S$. Пусть $a/s \in q$. Тогда $a = a/s \cdot s \in q \cap R = p$
$\Rightarrow a \cdot (1/s) \in p_S \Rightarrow q = p_S$. Т.к. $q \neq R_S$, то
$1 \notin q \Rightarrow p \cap S = \varnothing$

Упр 1. Д-ть лемму 2

Лемма 2 Если p — простой идеал в R, то $S = R \setminus p$ мультипл.

Опр 2 $R_p := R_S$ — локализация кольца R по простому идеалу p.

Следствие. Пусть p – простой идеал одн. целостности R. Тогда локализация R_p – локальное кольцо.

Д-во: По теореме 1 $q = pR_p = \{\frac{a}{s} \mid a \in R, s \notin p\}$ – простой идеал в R_p. Пусть I – макс. идеал в R_p. Тогда I прост. По т. 1 он имеет вид $I = rR_p$ для простого идеала r в R т.ч. $r \cap (R \setminus p) = \emptyset$ $\Rightarrow r \subseteq p \Rightarrow I = rR_p \subseteq q = pR_p$. Из макс. $I \Rightarrow$ $I = q = pR_p$ $\blacksquare$

4. Целая зависимость

Напоминание о расширениях полей: алг., транс., конечн. см. начало §9.5 в [ВИН].

Опр 1 Пусть $A \leq R$ — подкольцо кольца R. Эл-т $r \in R$ наз-ся **целым** над A, если сущ. унитарный (старш. коэф $= 1$) мн-н $f(x) \in A[x]$ т.ч. $f(r) = 0$.

Ур-е $f(x) = 0$ — ур-е целой зависимости для r.

Комплексное число $z \in \mathbb{C}$ наз-ся **целым алгебраическим**, если z цело над кольцом $\mathbb{Z}$.

Предл. 1 (св-ва целой зависимости) ТСЭ для $A \leq R$ и $r \in R$.

(1) r цел над A

(2) $A[r]$ — к.п. A-модуль

(3) $A[r] \leq B$, где B — к.п. A-модуль

(4) Сущ-ет точный $A[r]$-модуль M т.ч. M — к.п. как A-модуль.

Упр 2 Д-ть предл. 1 | Указ: (4)⇒(1) $M = \langle m_1 \dots m_n \rangle$ над $A \Rightarrow$ $rm_i = \sum c_{ij} m_j$ мн-н $f(x) = \det(xE - C)$, где $C = (c_{ij})$, - искомый.

Опр 2 Пусть A - подкольцо в R

$\overline{A}^R = \{ r \in R \mid r$ цел над $A \}$ - целое замыкание A в R

Т. 1 $\overline{A}^R$ - подкольцо в R.

Д-во: **Лемма 4** Если $r_1, \dots r_n$ целые над A, то $A[r_1 \dots r_n]$ - к.п. A-модуль

Д-во: Индукция по n и экв-ть пп. (1) и (2) Предл. 1 ∎

Пусть $b, c \in R$ - целые над A. Тогда $b \pm c, bc \in B =$
$= A[b, c]$ - к.п. A-модуль в силу леммы.

$A[b \pm c], A[bc] \subseteq A[b, c] \Rightarrow b \pm c$ и bc цел над A в силу экв-ти пп. (1) и (3) из Предл. 1 ∎

Предл 2 (транзитивность целой зависимости)

$A \le B \le C \le R$ C цела над B, B цела над A $\Rightarrow$ C цела над A.

Д-во: $r \in C$ и $0 = f(r) = r^n + b_{n-1} r^{n-1} + \ldots + b_0$, $b_i \in B$

$\Rightarrow$ r цела над $A[b_{n-1}, \ldots b_0]$ – к.п. над A. (лемма)

$\Rightarrow (A[b_{n-1}, \ldots b_0])[r]$ – к.п. A-модуль. Снова по предл 1 r цела над A ▨

Следствие 1 $\overline{\overline{A}^R}^R = \overline{A}^R$, т.е. целое замыкание целого замыкания совпадает с ним самим.

Д-во: Если $r \in R$ цела над $\overline{A}^R$, то по предл. 2 он цел и над A. $\Rightarrow r \in \overline{A}^R$ ▨

Опр 3. Область целостности R целозамкнута, если $\overline{R}^{Q(R)} = R$, т.е. целое замыкание в поле частных $Q(R)$ совпадает с ней самой.

Пример. $\mathbb{Z}$ целозамкнуто в $\mathbb{Q}$, т.к. $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ для $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то $q \mid a_n$, т.е. $a_n = 1 \Rightarrow q = 1$ ∎

Следствие 2. Если A — обл. целостности и L — алг. расширение поля частных $Q(A)$, то $\overline{A}^L$ целозамкнуто.

Д-во. Т.к. $Q(\overline{A}^L) \subseteq L$ (огр. алг. расш.) $\overset{\text{предл 2}}{\Longrightarrow} \overline{\overline{A}^L}^{Q(\overline{A}^L)} \leq \overline{\overline{A}^L}^L \overset{\text{след. 1}}{=} \overline{A}^L$ ∎

Теорема 2. Факториальная обл. целостности A целозамкнута

Д-во: Пусть $r = \frac{a}{b} \in Q(A)$, где $a, b \in A$ и $(a,b) = 1$.
Если r цел над A, то $\left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \ldots + c_1 a/b + c_0 = 0$
для некот. $c_i \in A$. Отсюда $a^n + b\tilde{c} = 0$ для некот. $\tilde{c} \in A \Rightarrow b \mid a^n$. В силу $(a,b) = 1$ и факт-сти кольца A получаем, что b — обр. эл-т в $A \Rightarrow r = a/b \in A$.

Предл 3. Пусть R — целозам. обл. целостности, $S \subseteq R$ мультипликатив. подмн-во. Тогда локализация R_S тоже целозамкнута.

Д-во: Пусть $x \in Q(R)$ цел над R_S. Тогда

$h(u)=0$, где $h(x)=x^n+\left(\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}\right)x^{n-1}+\ldots+r_0/s_0$

$r_i\in R$, $s_i\in S$. Обозначим $s=s_0\ldots s_{n-1}$. Т.к. $s^n h(u)=0$,

то su — корень мн-на $x^n+r'_{n-1}x^{n-1}+\ldots+r'_0$, где $r'_i\in R$.

Из целозамк. $R\Rightarrow su\in R\Rightarrow u=su/s\in R_S$ ■

Опр 4 Конечное расш. поля $\mathbb{Q}$ наз-ся алгебраическим числовым полем.

Пусть K — алг. числовое поле. Обозначим

O_K — кольцо алг. целых э-ов из K, т.е. те

$r\in K$: $f(r)=0$ для некот. унит. $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$.

Предл. 4. O_K — целозамкнуто | Д-во: вытекает из сл-я 2 к утв. 2.

<u>Пример</u> Кольцо $A=\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ не целозамк $\Rightarrow$ не факториально

Действ-но, $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ удовл. соотн-но $\frac{1}{a}=\frac{a}{1-a}$ — это так называемое золотое сечение. Поэтому $f(a)=0$ для $f(x)=x^2+x-1$. Значит, a цел над A, но $a\notin A$.

<u>Упр 3</u> Пусть $d\in\mathbb{N}$ и свободно от квадратов. Д-ть, что $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ не факториально при $d\equiv 1(4)$.