

## 2. Разложение идеалов

Изоморфизм:  $I, J \subseteq A$  в з. идеалы, если  $I + J = A$ .

Т.1 (Китайская теорема об остатках КТО). Пусть идеалы

$\mathfrak{I}_1, \dots, \mathfrak{I}_n$  кольца  $B$  попарно в з. идеалы,  $\mathfrak{I}_0 = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{I}_i$

Тогда  $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}_1 \cdot \mathfrak{I}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{I}_n$  и  $B/\mathfrak{I}_0 \cong B/\mathfrak{I}_1 \oplus \dots \oplus B/\mathfrak{I}_n$ .

Л-во:

$\{(b_1 + \mathfrak{I}_1, \dots, b_n + \mathfrak{I}_n) \mid b_i \in B\}$   
с естественн. операциями  $+$  и  $\cdot$ .

Указываем на  $1$ . Пусть  $n=1$ , очевидно.

Пусть  $n=2$ . Так  $\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 = B \Rightarrow \exists q_1 \in \mathfrak{I}_1, q_2 \in \mathfrak{I}_2: q_1 + q_2 = 1$ .

$\mathfrak{I}_1 \cdot \mathfrak{I}_2 \subseteq \mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$  по определению идеала. Пусть  $c \in \mathfrak{I}_0$ . Тогда

$c = c \cdot 1 = \underbrace{c q_1}_{\mathfrak{I}_2 \cdot \mathfrak{I}_1} + \underbrace{c q_2}_{\mathfrak{I}_1 \cdot \mathfrak{I}_2} \in \mathfrak{I}_1 \cdot \mathfrak{I}_2 \Rightarrow \mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}_1 \cdot \mathfrak{I}_2$ .  $P$ - и  $\bar{0}$ -е

$\varphi: B \rightarrow B/\mathfrak{M}_1 \oplus B/\mathfrak{M}_2$ ,  $\varphi(b) = (b+\mathfrak{M}_1, b+\mathfrak{M}_2)$ . Очевидно, что  $\ker \varphi = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_0$ . Кроме того,  $\varphi(a_1) = (\mathfrak{M}_1, a_1+\mathfrak{M}_2) = (\mathfrak{M}_1, 1+\mathfrak{M}_2) = (\bar{0}, \bar{1})$ . Аналогично,  $\varphi(a_2) = (\bar{1}, \bar{0}) \Rightarrow \varphi$  — сюръекция.

Пусть  $n > 2$ . Тогда  $\exists a_i \in \mathfrak{M}_1$  и  $b_i \in \mathfrak{M}_i, i=2, \dots, n$ :  $a_i + b_i = 1$ .

Тогда  $1 = \prod_{i=2}^n (a_i + b_i) \in \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots + \mathfrak{M}_n$ . Отсюда,  $B = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots + \mathfrak{M}_n$ , т.е.

идеалы  $\mathfrak{M}_1$  и  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2 + \dots + \mathfrak{M}_n$  взаимно просты. В силу единственности

представления идеала  $\mathfrak{M}$  в виде суммы идеалов  $\mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_n$  и  $n=2$  имеем

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_0 \text{ и}$$

$$B/\mathfrak{M}_0 = B/\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M} \cong B/\mathfrak{M}_1 \oplus B/\mathfrak{M} \cong B/\mathfrak{M}_1 \oplus B/\mathfrak{M}_2 \oplus \dots \oplus B/\mathfrak{M}_n \quad \square$$

Лемма 1 Пусть идеалы  $I, J$  кольца  $A$  вл. идеал,  $s \leq r$ .

Тогда  $I^s J / I^r \cap I^s J \cong I^s / I^r$ .

↑  
 при  $s=r$   
 идеал  $\Rightarrow$   
 слияние,  $r \leq r$   
 $s < r$

Д-во:

$I^s J \subseteq I^s$

$\begin{matrix} \cap \\ \varphi \end{matrix} \begin{matrix} x \\ \mapsto x + I^r \end{matrix}$

- кон. зм из  $I^s J \in I^s / I^r$ .

$\text{Ker } \varphi = I^r \cap I^s J$ , очевидно. Д-ем, что  $\varphi$  - сюръекция.

$I^{r-s}$  и  $J$  вл. идеалы по лемме 2.1.2 из АНТ 5  $\Rightarrow \exists y \in I^{r-s}$

$z \in J: 1 = y + z$ . Тогда  $\forall a \in I^s \Rightarrow a = a \cdot 1 = a \cdot y + a \cdot z$

$\Rightarrow az = a - ay \Rightarrow \varphi(az) = a + I^r \Rightarrow \varphi$  - сюръекция.  $\square$

Лемма 2 А - нетерово кольцо. Любой ненуль. сдвиг идеал содержит произведение ненуль. простых идеалов.

1-во: Предположим обратное. Тогда сущ. идеал  $\mathfrak{J}$ , максималный с условием  $\mathfrak{J}$  не содержит произведений простых идеалов. Т.к. сг.  $\mathfrak{J}$ , очевидно, не прост, то  $\exists a_1, a_2 \in A \setminus \mathfrak{J}$  т.ч.  $a_1 \cdot a_2 \in \mathfrak{J}$ . Тогда  $I_k = \mathfrak{J} + Aa_k, k=1,2$ .

Тогда для  $k=1,2$ , имеем  $I_k \triangleleft A$  и  $I_k \supset \mathfrak{J}$ , но  $I_k \neq \mathfrak{J}$ . Кроме того,  $\mathfrak{J} \supseteq I_1 \cdot I_2$ . В частности,  $I_k \neq A, k=1,2$ .

В идеале макс.  $\mathfrak{J}$ , и  $I_1$  и  $I_2$  содержится произведение простых идеалов. Но тогда  $\mathfrak{J} \supseteq I_1 \cdot I_2$  тоже содержит, против

Т.2 (о разл. идеалах гезекенгова кольца) «ОТН гез.к. макс.»

Пусть  $A$  — гезекенгово кольцо,  $0 \neq I \triangleleft_{\neq} A$ . Тогда  $I = P_1^{\gamma_1} \cdots P_n^{\gamma_n}$ ,

где  $P_i$  — простые идеалы,  $\gamma_i \geq 1$ . Неблизки  $\{P_1, \dots, P_n\}$  и  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  определяют однозначно.

Л-130: Существование В силу леммы 2 идеал  $I$

содержит идеал, кот. явл-ся произведением простых.

Т.е. в  $I \supseteq I_0 = p_1^{\Gamma_1} \dots p_n^{\Gamma_n}$  - максим. с таким условием,  
где  $p_i, i=1..n$ , - простые идеалы, причём  $p_i \neq p_j$  при  $i \neq j$ .

Заметим, что  $p_i$  и  $p_j$  вз. просто, т.к. они макс. в силу  
гедекитговости  $A$ . Мы докажем, что  $I = I_0$ .

В силу 7.1 (КТО)  $A/I_0 \cong A/p_1^{\Gamma_1} \oplus \dots \oplus A/p_n^{\Gamma_n}$ .

где из-за  $\varphi: x + I_0 \rightarrow (x + p_1^{\Gamma_1}, \dots, x + p_n^{\Gamma_n})$

$I_0 \subseteq I \subseteq A \Rightarrow I/I_0 \subseteq A/I_0$ , причём образ  $I/I_0$

при изоморфизме  $\varphi$  - это  $I/I_0 = \bigoplus_{j=1}^n \bar{I}_j$ , где  $\bar{I}_j = I/p_j^{\Gamma_j} \cap I$ .

$$\text{Но } I_j = \frac{\pm}{p_j^{f_j}} \cap I \cong \frac{I + p_j^{f_j}}{p_j^{f_j}} \cong A / p_j^{f_j}$$

В цепи идеалов  $\rightarrow$  из 7.2.1.2 (ANT5)  $I_j \cong p_j^{s_j} / p_j^{f_j}$

для вект.  $s_j \leq f_j$ . Сл-но,  $p_1^{f_1} \cdot \dots \cdot p_n^{f_n} = I_0 \subseteq I' = p_1^{s_1} \cdot \dots \cdot p_n^{s_n}$

$$\text{Умно } \frac{I'}{I_0} = \frac{p_1^{s_1} \cdot \dots \cdot p_n^{s_n}}{p_1^{f_1} \cdot \dots \cdot p_n^{f_n}} \cong \bigoplus_{j=1}^n \frac{p_j^{s_j}}{p_j^{f_j}} = \bigoplus_{j=1}^n \frac{I_j}{I_0} = \frac{I}{I_0}$$

Значит,  $I' = I$  (из связи  $I/I_0$  и  $I'/I_0$  связь)

$$\Rightarrow I = p_1^{s_1} \cdot \dots \cdot p_n^{s_n} = I_0 \text{ в цепи макс. } I_0.$$

Лемма Зарицкого Если идеал  $p \in \{p_1, \dots, p_n\}$ , то  $I \subseteq p$ . А. е. н. обратное. Пусть  $I \subseteq p$ , где  $p$ -упрощен. Если  $p \notin \{p_1, \dots, p_n\}$ , то  $p$  и  $I$  взаимно просты  $\Rightarrow$  сн. ксд

$1 = x + y \in \mathcal{P}$ , условия  $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{p_1, \dots, p_n\} = \{p \in A \mid I \subseteq p\} \\ \text{оп. по означению. NB} \end{array} \right.$

Остало показать означенности  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ . Тогда для  
 опре. см  $p = p_1$  и  $q = p_2^{\Gamma_2} \dots p_n^{\Gamma_n}$ . Т.к.  $p$  и  $q$  вз. перпен.  
 $1 = x + y \Rightarrow y = 1 - x$  обратн. в локализации  $A_p \Rightarrow$   
 $q \cdot A_p = A_p$ . Далее,  $I \subseteq p \Rightarrow I \cap (A \setminus p) = \emptyset \Rightarrow$  означ.  
 определены и для  $y \in A_p$ :  $I A_p = y$ . Но  $A_p$ -локализация  
 регулярного  $\Rightarrow I A_p = p^\Gamma A_p$  для нек-го  $\Gamma \in \mathbb{N}$ .

Увидев  $I A_p = p_1^{\Gamma_1} q \cdot A_p = p_1^{\Gamma_1} A_p = p^\Gamma A_p \Rightarrow \Gamma = \Gamma_1$   
 означен означено. Аналогично для  $j = 2, \dots, n$  ▢

Следствие 1 Если  $A$  — факториальное целостное кольцо, то  $A$  — обл. главных идеалов.

Д-во: Пусть  $I \trianglelefteq A$ . В силу т. 1  $I = p_1^{\Gamma_1} \dots p_n^{\Gamma_n}$ , где  $p_i$  — простые. Если  $p_i = x_i A$  — главные, то  $I = x_1^{\Gamma_1} \dots x_n^{\Gamma_n} A$  — тоже. А то, что простой идеал в факт. целостном кольце главный следует из лемм 2.1.2 и 2. ANT.5.  $\square$

Следствие 2 Если  $A$  — целостное кольцо с конечным числом простых идеалов, то  $A$  — область гл. идеалов.

Д-во: Как и выше достаточно показать, что все простые идеалы — главные. Пусть  $p_1, \dots, p_n$  — все разл. простые идеалы в  $A$ .

В силу огуности. разложимся л т. 1  $p_1^2 \neq p_1 \Rightarrow \exists x \in p_1 \setminus p_1^2$

В силу КТО  $A/p_1 p_2 \dots p_n \cong A/p_1^2 \oplus A/p_2 \oplus \dots \oplus A/p_n$ .

Поэтому  $\exists x \in A : \varphi(x) = (x_1 + p_1^2, 1 + p_2, \dots, 1 + p_n)$

Тогда  $x \in p_1 \setminus p_1^2$ , т.к.  $x - x_1 \in p_1^2$ ,  $x \notin p_j, j=2 \dots n$ .

Пусть  $I = (x)$ . По т. 1 он макс. на уровне.

Т.к.  $I \not\subseteq p_j, j=2, \dots, n$ ,  $I = p_1$ . Т.к.  $I \not\subseteq p_1^2 \Rightarrow I = p_1$

$\Rightarrow p_1 = (x)$  - главный. А мы только что глядя пр. упростили  $\square$

Пример (Упр 1) Кольцо  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = A$  - гессиангозо,  $\square$

идеал  $I = (2)$  не упрощает, идеал  $p = (2, 1 + \sqrt{-5})$  упрощает,

$I = p^2$  - разложимое (2) не упрощает. Док-тв!