3. Дробные идеалы

Опр 1 Пусть A — дедекиндово кольцо, $K = Q(A)$ — его поле частных. Ненулевой A-подмодуль I в K наз-ся дробным идеалом кольца A, если найдётся ненулевой $d \in A$ такой, что $dI \subseteq A$. Эл-т d — знаменатель дробного идеала I. Мн-во всех дробных идеалов — $Id(A)$.

Примеры. (1) $0 \neq I \trianglelefteq A \Rightarrow I \in Id(A)$ для $d = 1$.

I - целый идеал.

(2) $\forall x = \frac{a}{b} \in K = Q(A) \Rightarrow I = xA \in Id(A)$ с $d = b$.

$I = (x) = xA$ — главный дробный идеал. Мн-во всех главных дробных идеалов — $P(A)$.

Упр 1 $Id(\mathbb{Z}) = P(\mathbb{Z}) = \frac{a}{b}\mathbb{Z}$, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Предл. 1 (св-ва дробных идеалов) Пусть $I, J \in Id(A)$.

1) I – к.п. A-модуль
2) $I+J,\ I\cap J,\ I\cdot J \in Id(A)$
3) $I^* = \{x \in Q(A) \mid xI \subseteq A\} \in Id(A)$
4) $I\cdot I^* = A$

Д-во: 1) $dI \trianglelefteq A$. Т.к. A – нётерово $\Rightarrow dI = (dx_1 \ldots dx_n)$

$\forall x \in I \quad dx = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n$, т.к. A – обл. цел-сти и $d \neq 0 \Rightarrow x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \Rightarrow I = Ax_1 + \ldots + Ax_n$ – к.п. как A-модуль

2) $d_1 I \trianglelefteq A,\ d_2 J \trianglelefteq A \Rightarrow d_1 d_2 (I * J) \trianglelefteq A$, где $* \in \{+, \cap, \cdot\}$ сл-но, $I * J$ – дробный идеал.

Отметим, что $I+J\neq 0\neq I\cdot J \Rightarrow I\cap J\supseteq I\cdot J\neq 0$, т.е. все они — ненулевые

3) Пусть $x,y\in I^*=\{x\in Q(A)\mid xI\subseteq A\}$, $a\in A$.
Тогда $x+y\in I^*$ и $(ax)I=a(xI)\subseteq A \Rightarrow I^*$ — A-модуль
Зн-ль = любой $0\neq d'\in I\cap A$ (он сущ-ет) $\Rightarrow I^*$ — дробный идеал.

4) Р-м сначала случай, когда A — обл. гл. идеалов.
Тогда $dI=xA$ для $0\neq x\in A \Rightarrow I=\frac{x}{d}A$ — гл. дроб. идеал
$\Rightarrow \frac{d}{x}\in I^* \Rightarrow 1=\frac{x}{d}\cdot\frac{d}{x}\in I\cdot I^* \Rightarrow II^*=A$.
Общий случай: Допустим $A\neq I\cdot I^* \Rightarrow II^*\underset{\neq}{\trianglelefteq} A$.
Поэтому найдется $P\underset{\max}{\trianglelefteq} A$: $II^*\subseteq P$.

Перейдём к локализации A_p по идеалу I. По следствию 2 из т. 2.22 (ОТА) A_p — кольцо главных идеалов (т.к. в A_p единств. простой идеал — p)

Имеем $A \subset A_p \subset \underset{\substack{\cup| \\ I,\, I^*}}{Q(A)} = Q(A_p)$ Проверить!

IA_p, I^*A_p — дробные идеалы в A_p (с теми же знаменателями)

Д-ем, что $(IA_p)^* = I^*A_p$

$\supseteq$: $(I^*A_p)(IA_p) = (I^*I)A_p \subseteq AA_p = A_p$.

$\subseteq$: Пусть $x \in (IA_p)^*$, т.е. $x(IA_p) \subseteq A_p \Rightarrow xI \subseteq A_p \Leftrightarrow$

$xx_i \in A_p \ \forall i = 1..n$, где $I = Ax_1 + \dots + Ax_n$ (I — к.п. по п.1)

$x x_i = \frac{a_i}{s_i} \in A_p$, $a_i \in A$, $s_i \in S = A \setminus p$ $\forall i = 1..n$.

Поэтому $(x s_1 .. s_n) x_i = a_i s_1 .. s_n \in A \Rightarrow x s_1 .. s_n \in I^* \Rightarrow$

$x \in \frac{1}{s_1 .. s_n} I^* \subseteq I^* A_p$.

Т.к. A_p - кольцо главных идеалов, $A_p = I A_p \cdot I^* A_p$, но

$A \neq I I^* \underset{\text{собст. идеал}}{\Rightarrow} A_p \neq I I^* A_p = I A_p I^* A_p$, противор $\blacksquare$

<u>Т.1</u> Мн-во $Id(A)$ дробных идеалов дедекиндова кольца A образует свободную абелеву группу по умножению с мн-вом всех ненул. простых идеалов в качестве базы (порожд. мн-ва). Мн-во $P(A)$ главных дробных идеалов — подгруппа в $Id(A)$.

Д-во: $I_1, I_2 \in Id(A) \Rightarrow I_1 I_2 \in Id(A)$ – п. 2 опред 1

ассоц $\Leftarrow$ ассоц в $Q(A)$

Комм $\Leftarrow$ Комм в $Q(A)$

Единица: $A \in Id(A)$, т.к. $I \cdot A = A \cdot I = I$

Обратный: $I^{-1} = I^{*}$ в силу пп. 3-4 опред. 1.

Если $xA, yA \in P(A) \Rightarrow (xA)(yA) = xyA \in P(A)$

$Q(A) \ni x, y \neq 0$ $\qquad (xA)^{*} = x^{-1}A \in P(A)$

Поэтому $P(A) \leq Id(A)$. Осталось д-ть, что

$Id(A)$ свободна. Пусть $I \in Id(A)$ и d-зн-ль I,

т.е. $dI \trianglelefteq A$. По теореме 2.2.2 (ОТА) имеем

АД $dI = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$ и $АД(d) = dA = p_1^{s_1} \dots p_n^{s_n}$, где $p_1 \dots p_n$ – простые идеалы в A, $r_i, s_i \geq 0$. Имеем

$$dI = (d) \cdot I \Rightarrow I = I \cdot (d)(d)^* = (dI)(d^*) = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n} (p_1^*)^{s_1} \dots (p_n^*)^{s_n}$$

$$= p_1^{r_1 - s_1} \dots p_n^{r_n - s_n},$$ где $p^{-m} := (p^*)^m$

<u>Однозн-сть разложения</u>: пусть для $I \in Id(A)$:

$I = p_1^{t_1} \dots p_n^{t_n} = p_1^{u_1} \dots p_n^{u_n}$, $t_i, u_i \in \mathbb{Z}$. Выберем $a_i \geq 0$ так, что $t_i + a_i$ и $u_i + a_i \geq 0$ $\forall i = 1..n$. Тогда

$J = I \cdot p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n} = p_1^{t_1 + a_1} \dots p_n^{t_n + a_n} = p_1^{u_1 + a_1} \dots p_n^{u_n + a_n}$. т.к. $J \trianglelefteq A$

По т. 2.7.2. $t_i + a_i = u_i + a_i$ $\forall i = 1..n \Rightarrow t_i = u_i$ $\blacksquare$

Опр 2 Фактор-группа $Id(A)/P(A)$ = $Cl(A)$ — группа классов кольца A.

Следствие 1 Пусть A — дедекиндово кольцо. След. усл.-я экв-ны:

(1) $|Cl(A)| = 1$

(2) A — обл. главных идеалов

(3) A факториально

Д-во: (1) ⇒ (2) очевидно из опр-й.

(2) ⇒ (3) (курс алгебры) Напоминание: нётерово ⇒ разл.

$\forall$ неприв. $p \in A \Rightarrow p$ — простой $\Rightarrow A$ факториально
A — ОГИ Т. 1.1 — из ANT1

(3) $\Rightarrow$ (2) – следствие 1 из т. 2.2.2 (ОТА)

(2) $\Rightarrow$ (1) Если $I \in Id(A)$, то $A \ni dI \underset{\substack{\uparrow \\ A-\text{PID}}}{=} Aa$, $a \in A$ $\Rightarrow$

$I = A\left(\frac{a}{d}\right) \in P(A) \Rightarrow |Cl(A)| = 1$. $\blacksquare$

Если L – алг. числовое поле, то число $h_L = |Cl(O_L)|$ наз-ся числом классов поля L.

<u>Следствие 2</u> Если L – алг. числовое поле, то СЭУ

(1) $h_L = 1$ (2) O_L – обл. гл. идеалов (3) O_L факториально.

Таким образом, вопрос о факториальности O_L сведён к проверке тривиальности группы классов.