5. Норма идеала

Если L/K - кон. расширение полей, то для $\forall x \in L$ опр-ия норма $N_{L/K}(x) = \det([\rho^x])$, где $\rho^x : y \mapsto xy$ - оператор левого сдвига в в.п. L над K.

Пусть $AKLB$, где A - дедекиндово. Мы хотим опр-ть норму для любого $I \in Id(B)$, т.е гом-зм $N : Id(B) \to Id(A)$ так, чтобы $N_{L/K}(x)A = N(xB)$ $\forall x \in L^*$, т.е. норма главного дробного идеала, порожд. эл-том $x \in L^*$, совпадала с нормой эл-та x.

В силу того, что $Id(B)$ - своб. абелева группа с базисом, сост. из простых идеалов кольца B, дост. опр-ть норму на простых идеалах из B.

Опр 1 Пусть AKLB, A - дедекиндово, $P \neq 0$ - простой идеал в B.
Идеал в A $N(P) = p^{f(P/p)}$, где $p = P \cap A \trianglelefteq A$,
наз-ся нормой простого идеала P из B. Для
произв. дробного идеала $I = P_1^{e_1} \dots P_g^{e_g} \in Id(B)$
полагаем $N(I) = p_1^{e_1 f_1} \dots p_g^{e_g f_g}$, где $p_i = P_i \cap A$,
$f_i = f(P_i/p_i)$. От-е $N: Id(B) \to Id(A)$ - гом-зм.

Предл. 1 (Св-ва норм. идеала) Пусть AKLB, A-дед. Тогда

1) $N(IB) = I^n$, где $n = [L:K]$, $\forall I \trianglelefteq A$.

2) Если L/K - расш. Галуа, то $\forall P \trianglelefteq B$, $P \neq 0$ прост. и разл. $pB = (P_1 \dots P_g)^e$,
где $p = P \cap A$, вып-ся $N(P)B = (P_1 \dots P_g)^{ef} = \prod_{\sigma \in Gal(L/K)} \sigma(P)$.

Д-во: 1) Пусть сначала $I = p \trianglelefteq_{\text{прост.}} A$. Имеем

$pB = P_1^{e_1} \dots P_g^{e_g}$, P_i – простые ненул. идеалы в B.

Для $\forall i$ $\quad P_i \cap A = p$ (лемма 2.4.1 из ANT8) $\Rightarrow N(P_i) = p^{f_i}$

где $f_i = f(P_i/p) = [B/P_i : A/p]$. Поэтому

$$N(pB) = N(P_1^{e_1} \dots P_g^{e_g}) \underset{\uparrow}{=} N(P_1)^{e_1} \dots N(P_g)^{e_g} = p^{\sum f_i e_i} = p^n$$

в силу т. 2.4.1 о фундамент. тождестве из ANT8.

Если $0 \neq I \trianglelefteq A$ – произв., то $I = p_1^{s_1} \dots p_e^{s_e}$, $p_i \trianglelefteq_{\text{прост.}} A \Rightarrow$

$IB = (p_1 B)^{s_1} \dots (p_e B)^{s_e} \Rightarrow N(IB) = N(p_1 B)^{s_1} \dots N(p_e B)^{s_e} =$

$= (p_1^n)^{s_1} \dots (p_e^n)^{s_e} = (p_1^{s_1} \dots p_e^{s_e})^n = I^n$, ч.т.д.

2) Т.к. L/K – расш. Галуа, по т. 2.4.1. имеем $N(P)B = (pB)^f = (P_1 \ldots P_g)^{ef}$. Кроме того, (см. д-во т. 2.4.1) $G = Gal(L/K)$ действует транзитивно на мн-ве $\{P_1, \ldots, P_g\}$, которое вкл. в себя идеал P (т.к. $pB \subseteq P$), т.е. $\{P_1 \ldots P_g\}$ – орбита P^G. Поскольку длина орбит $= g$, а $|G| = n = g \cdot (fe)$, то порядок стабилизатора $G_{P_i} = fe$ $\forall i = 1 \ldots g$. Сл-но,

$$\prod_{\sigma \in G} \sigma(P) = P_1^{ef} \ldots P_g^{ef} = N(P)B \quad \blacksquare$$

<u>Лемма 1</u> (транзитивность нормы идеала) Пусть $AKLB$, E/L – кон. сеп. расш. и $C = \overline{A}^E$. Тогда $N^{E/K}(I) = N^{L/K}(N^{E/L}(I))$ $\forall I \in Id(C)$

Д-во: В силу транз. целост. $C = \overline{A}^E = \overline{B}^E$.

Достаточно проверить для простого идеала $t \trianglelefteq C$.

Пусть $q = t \cap B \triangleleft B$ и $p = t \cap A = q \cap A \trianglelefteq A$. По опр-ю $N^{E/L}(t) = q^{m_1}$ и $N^{L/K}(q) = p^{m_2}$, где $m_1 = |C/t : B/q|$ и $m_2 = |B/q : A/p|$. Но $m = |C/t : A/p| = m_1 \cdot m_2$ и $p = t \cap A \Rightarrow N^{E/K}(t) = p^m = (p^{m_2})^{m_1} = N^{L/K}(N^{E/L}(t))$ $\blacksquare$

Т.1 (о связи норм идеала и эл-та) Пусть $AKLB$, $x \in L^* = L \setminus \{0\}$. Тогда $N(xB) = N_{L/K}(x)A$.

Д-во: Достаточно док-ть для $x \in B$, т.к. $N_{L/K}$ и N мультипликативны и $\forall x \in L^*$ $\exists c, d \in B$: $x = \frac{c}{d}$.

Пусть $x \in B$ и $xB = P_1^{s_1} \dots P_e^{s_e}$ — разложение на простые идеалы в B.

Обозн: $I = N(xB) = N(P_1)^{s_1} \dots N(P_e)^{s_e} \trianglelefteq A \Rightarrow$

$IB = (N(P_1)B)^{s_1} \dots (N(P_e)B)^{s_e} \leq B$. На семинаре д-ли, что $I_1 B = I_2 B \Leftrightarrow I_1 = I_2$. Сл-но, достаточно д-ть, что $IB = aB$, где $a := N_{L/K}(x)$.

Пусть сначала L/K - расш. Галуа. Тогда

$N(P_i)B = \prod\limits_{\sigma \in G} \sigma(P_i)$, где $G = Gal(L/K)$. $\Rightarrow$

$$IB = \prod_{i=1}^{e} \Big(\prod_{\sigma \in G} \sigma(P_i)\Big)^{s_i} = \prod_{\sigma \in G} \Big(\prod_{i=1}^{e} \sigma(P_i)^{s_i}\Big) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(xB) =$$

$= \Big(\prod\limits_{\sigma \in G} \sigma(x)\Big)B = N_{L/K}(x) \cdot B$, что и треб. док-ть.

предл. 1.5.3 из ANT 3

Если L/K не явл-ся расш. Галуа, то $\exists$ поле $E \supset L$ такое, что E/K – расш. Галуа. Пусть $d = |E:L|$.

В силу п. 1 предл. 1 $N^{E/L}(IC) = I^d$. Т.к. E/K – расш. Галуа имеем $N^{E/K}(\underset{IC}{\underset{\shortparallel}{xC}}) = N_{E/K}(x)A$. Кроме того,

$$N^{E/K}(IC) \overset{\text{транз.}}{=} N^{L/K}(N^{E/L}(IC)) = N^{L/K}(I^d) = N^{L/K}(xB)^d \Rightarrow$$

E/K-расш. Галуа $\Rightarrow$ $\shortparallel$

$$N_{E/K}(x)\cdot A \overset{d}{=} N_{L/K}(N_{E/L}(x))A \underset{x\in L}{=} N_{L/K}(x^d)A = (N_{L/K}(x)A)^d$$

Итак, $N^{L/K}(xB)^d = (N_{L/K}(x)A)^d$. Но $Id(A)$ – св. об. группа $\Rightarrow y^d = z^d \Leftrightarrow y = z$ в ней $\Rightarrow$

$$N^{L/K}(xB) = N_{L/K}(x)A \qquad \blacksquare$$

Опр 2 Пусть L – алг. числовое поле, $I \trianglelefteq O_L$. Число $\mathbb{N}(I) = |O_L / I|$ – считающая норма идеала I.

Пример Если $L = \mathbb{Q}$ и $I = n\mathbb{Z}$, то $N(I) = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n < \infty$.

Оказывается, считающая норма всегда конечна.

Т. 2 Пусть L – алг. числовое поле, $I \trianglelefteq O_L$. Тогда

1) $\mathbb{N}(I)$ конечна
2) $N(I) = \mathbb{N}(I)\mathbb{Z}$
3) $\forall$ пол. константы C $\exists$ только кон. число $I \trianglelefteq O_L$: $\mathbb{N}(I) < C$.

Д-во: 1) Пусть $I = P_1^{e_1} \ldots P_g^{e_g}$, $P_i \underset{\text{прост.}}{\trianglelefteq} O_L$, $f_i = f(P_i / p_i)$

$p_i = P_i \cap \mathbb{Z} = p_i\mathbb{Z}$ – простой идеал в $\mathbb{Z}$. В силу доказанного в т. о функц. тождестве,

$\dim_{(\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})} O_L/p_i^{e_i} = e_i f_i < \infty \Rightarrow |O_L/p_i^{e_i}| = p_i^{e_i f_i} < \infty.$

по КТО: $O_L/I \cong \bigoplus_{i=1}^{g} O_L/p_i^{e_i} \Rightarrow |O_L/I| = \prod_{i=1}^{g} p_i^{e_i f_i} < \infty$

2) $N(I) = N(P_1)^{e_1} \ldots N(P_g)^{e_g}$

$N(P_i) = (p_i\mathbb{Z})^{f_i}$ p_i - простое число в $\mathbb{Z}$.

$\Downarrow$

$N(I) = (p_1^{e_1 f_1} \ldots p_g^{e_g f_g})\mathbb{Z} = |O_L/I|\mathbb{Z} = \mathbb{N}(I)\mathbb{Z}$

3) т.к. $\mathbb{N}(I) = \prod_{i=1}^{g} p_i^{e_i f_i} \geq \prod_{i=1}^{g} p_i^{e_i}$ (т.к. $f_i \geq 1$) $\Rightarrow$

сущ только кон. число наборов p_i и e_i: $\mathbb{N}(I) < C$.

но $\forall p \in \mathbb{Z}$ $\exists$ лишь кон. число $P \triangleleft O_L$: $P \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, т.к.

$$p\mathcal{O}_L = Q_1^{s_1} \cdots Q_\ell^{s_\ell} \quad u \quad P \in \{Q_1 \ldots Q_s\} \quad \blacksquare$$