

Вопросы к экзамену по алгебраической теории чисел

Лектор: проф. А. В. Васильев

2 семестр, 2025-26 учебный год

1. Теорема Ферма для показателя 4 и метод бесконечного спуска.
2. Квадратичные вычеты и невычеты конечного поля, множество квадратичных вычетов как ядро гомоморфизма. Символ Лежандра и его свойства.
3. Теорема Гаусса (квадратичный закон взаимности).
4. Область целостности, простота и неприводимость ее элементов; нётеровость кольца и разложимость его элементов; факториальность кольца, критерий факториальности.
5. Локальное кольцо, критерий локальности. Мультипликативное множество, локализация кольца. Теорема о соответствии простых идеалов.
6. Целые элементы в расширении кольца и целые алгебраические числа. Целое замыкание кольца, свойства целой зависимости.
7. Определение целозамкнутости, целозамкнутость целого замыкания области целостности в своем поле частных и его следствие для алгебраических числовых полей. Теорема о целозамкнутости факториального кольца.
8. Норма и след, их элементарные свойства; транзитивность функции следа, связь с минимальным и характеристическим многочленами.
9. Норма и след; случай сепарабельного расширения, транзитивность нормы. Критерий сепарабельности расширения (без док-ва).
10. Теорема о целом базисе, целый базис алгебраического числового поля. Дискриминант набора элементов, теорема о вычислении дискриминанта (без док-ва).
11. Определение дедекиндова кольца. Дедекиндовость колец: кольца главных идеалов, и локализации дедекиндова кольца.
12. Определение дедекиндова кольца, дедекиндовость целого замыкания дедекиндова кольца в его поле частных.
13. Теорема о целозамкнутой нётеровой области целостности с единственным простым идеалом и структура идеала фактор-кольца дедекиндова кольца по степени простого идеала.
14. Взаимная простота идеалов и китайская теорема об остатках.
15. Основная теорема арифметики для дедекиндовых колец и ее следствия.
16. Дробные идеалы дедекиндова кольца и их свойства. Группа дробных идеалов и группа классов. Факториальность кольца целых алгебраического поля и число классов этого поля.
17. Разложение идеала в расширении, критерий вхождения простого идеала расширения в разложение. Индексы ветвления и инерции, фундаментальное тождество для разложения идеала в расширении и его частный случай для расширения Галуа.
18. Теорема Дедекинда-Куммера, критерий разветвляемости простого идеала в расширении (в условиях ТДК).
19. Норма идеала и ее свойства, транзитивность нормы идеала.
20. Теорема о связи норм главного идеала и элемента. Считающая норма идеала в кольце целых алгебраических чисел.

21. Решетка как дискретная подгруппа, полная решетка и ее объем, теорема Минковского.
22. Объем полной решетки, натянутой на целый базис алгебраического числового поля через его дискриминантный идеал.
23. Оценка считающей нормы идеала. Теорема о конечности числа классов и ее следствия.
24. Критерий обратимости целого алгебраического числа; логарифмическое вложение группы единиц, его образ и ядро; теорема Дирихле (с частичным док-вом).
25. Круговые многочлены и их свойства; теорема о кольце целых кругового поля (случай $n = p$ — нечётное простое).
26. Единицы кольца целых кругового поля (случай $n = p^k > 2$).
27. Теорема Ферма для показателя 3.
28. Регулярные простые числа, теорема Ферма для регулярных простых показателей: первый случай (p не делит xuz).
29. Регулярные простые числа, теорема Ферма для регулярных простых показателей: второй случай (p делит xuz).