3.4 Линейные отображения

Опр 1 Пусть V и U — в.п. над полем F.
От-е $\varphi : V \to U$ наз-ся линейным, если
а) $(a+b)\varphi = a\varphi + b\varphi \quad \forall a, b \in V$
б) $(\alpha a)\varphi = \alpha(a\varphi) \quad \forall a \in V, \forall \alpha \in F.$

В случае, когда $V = U$, говорят о линейном преобразовании или линейном операторе пр-ва V. Мн-во всех лин. отображений из V в U обозн. через $\mathcal{L}(V, U)$, а мн-во всех лин. преобразований пр-ва V через $\mathcal{L}(V)$.

Предл 1 Пусть V, U – в.п. над полем F и $\varphi : V \to U$.

1) Если φ линейно, то $0\varphi = 0$

2) Если φ линейно, то $\varphi(-a) = -\varphi(a)$

3) φ линейно $\iff$ для любой л.к. любого конечного набора в-ров из V выполняется

$(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_s v_s)\varphi = \alpha_1(v_1\varphi) + \ldots + \alpha_s(v_s\varphi)$.

Упр 1 Д-ть предл. 1.

Пример

1. Поворот пл-ти E^2 – лин. от-е и даже лин. пр-е пр-ва E^2

2. Проектирование $V = E^3$ на пл-ть $U \cong E^2$ (параллельно прямой $W = \ell$) – лин. от-е.

Обобщение: Если $V = U \oplus W$, то $\forall v \in V \ \exists!\, u \in U$, $w \in W$: $v = u + w$. От-е φ из V в U по правилу $v\varphi = u$ (т.е. проектирование V на U параллельно W) — линейное от-е из V в U (можно рас-ть как лин. пр-е пр-ва V).

<u>Упр 2</u> Проверьте линейность!

3. Пусть $V = U = \mathbb{R}_n[x]$ — пр-во мн-нов от перем. x степени $\le n$. Пр-е пр-ва V (или от-е из $\mathbb{R}_n[x]$ в $\mathbb{R}_{n-1}[x]$) по правилу $f(x) \mapsto f'(x)$ (взятие производной) — линейное от-е (св-ва производной!)

4. Напомним, что поле F - можно расс-ть как 1-мерное в.п. над самим собой.

Лин. отображение $f \in \mathcal{L}(V, F)$ принято называть <u>линейной ф-цией</u> или <u>линейным функционалом</u> на V.

5. Пусть $\alpha \in F$. Пр-е φ_α пр-ва V действ. по правилу $v\varphi_\alpha = \alpha v$. Тогда

$$(v+u)\varphi_\alpha = \alpha(v+u) = \alpha v + \alpha u = v\varphi_\alpha + u\varphi_\alpha$$

и $(\beta v)\varphi_\alpha = \alpha(\beta v) = \beta(\alpha v) = \beta(v\varphi_\alpha)$

скалярное пр-е

$\Rightarrow \varphi_\alpha \in \mathcal{L}(V)$. В частности, при $\alpha = 0$ нулевое пр-е $\mathcal{O}$ пр-ва V и при $\alpha = 1$, тождеств. пр-е линейных! Далее, обозн. $\varphi_\alpha = \alpha\mathcal{E}$

5. Пусть $V = F^m$, $U = F^n$ — арифм. пр-ва, а $A \in M_{m \times n}(F)$. Отоб-е $\varphi_A : V \to U$ по правилу $x\varphi_A = xA \in \mathcal{L}(V, U)$, т.к.

$$(x+y)\varphi_A = (x+y)A = xA + yA = x\varphi_A + y\varphi_A$$

$$(\alpha x)\varphi_A = (\alpha x)A = \alpha(xA) = \alpha(x\varphi_A).$$

Опр 2 Пусть V, U, W — в.п. над полем F. Если $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V, U)$, то отоб-е $\varphi + \psi : V \to U$ по правилу $v(\varphi+\psi) = v\varphi + v\psi$ $\forall v \in V$ наз-ся **суммой** отоб-й φ и ψ. Если $\alpha \in F$ и $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$, то отоб-е $\alpha\varphi : V \to U$ по правилу $v(\alpha\varphi) = \alpha(v\varphi)$ наз-ся **произведением** скаляра α и линейного отоб-я φ.

Если $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$, $\psi \in \mathcal{L}(U, W)$, то отоб-е $\varphi\psi : V \to W$ по правилу $v(\varphi\psi) = (v\varphi)\psi \ \forall v \in V$ наз-ся **произведением** отображений φ и ψ.

<u>Предл 1</u> Отображения $\varphi + \psi$, $\alpha\varphi$ и $\varphi\psi$ линейные.

Д-во:

$\forall\, v, u \in V$ $(v+u)(\varphi+\psi) = (v+u)\varphi + (v+u)\psi =$
$= v\varphi + u\varphi + v\psi + u\psi = v\varphi + v\psi + u\varphi + u\psi =$
$= v(\varphi+\psi) + u(\varphi+\psi)$ и $(\alpha v)(\varphi+\psi) = (\alpha v)\varphi +$
$+ (\alpha v)\psi = \alpha(v\varphi) + \alpha(v\psi) = \alpha(v(\varphi+\psi))$

Аналогично для $\alpha\varphi$ и $\varphi\psi$ ∎

<u>Следствие</u> $\langle \mathcal{L}(V, U), +, \text{„}\times\alpha\text{"} \rangle$ и $\langle \mathcal{L}(V), +, \circ, \text{„}\times\alpha\text{"} \rangle$ — алг. системы.

<u>Опр 3</u> Пусть V, U — в.п. над F, $\dim V = m$, $\dim U = n$ и $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$. Выберем базис A пр-ва V из в-ров $a_1, \dots, a_m$ и базис B пр-ва U из в-ров $b_1, \dots, b_n$. Матрицей лин. отображения φ (соотв. базисам A и B) наз-ся матрица $[\varphi]_{AB} = A = (\alpha_{ij}) \in M_{m \times n}(F)$, для которой

$$\begin{cases} a_1\varphi = \alpha_{11} b_1 + \quad + \alpha_{1n} b_n \\ \vdots \\ a_m\varphi = \alpha_{m1} b_1 + \quad + \beta_{mn} b_n \end{cases}$$

<u>Матр. форма:</u>

$(1) \Longleftrightarrow a\varphi = [\varphi]_{AB}\, b = A b$, где $a\varphi = \begin{pmatrix} a_1\varphi \\ \vdots \\ a_m\varphi \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Если $V = U$ и $A = B$, то $[\varphi]_A \in M_n(F)$ — м-ца линейного преобразования в базисе A.

Предл 2. Пусть $[\varphi]_{AB}$ – м-ца лин. отоб-я $\varphi: V \to U$, соотв. с базисами A и B пр-в V и U соотв-но. $\forall v \in V$ $[v\varphi]_B = [v]_A [\varphi]_{AB}$. (2).

Д-во: Пусть $v = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m$, т.е. $v = [v]_A a$.

Имеем $v\varphi = (\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m)\varphi = \alpha_1(a_1\varphi) + \ldots + \alpha_m(a_m\varphi) =$

$= [v]_A (a\varphi) = [v]_A ([\varphi]_{AB} b) = ([v]_A [\varphi]_{AB}) b$.

С др. стороны $[v\varphi]_B b = v\varphi = ([v]_A [\varphi]_{AB}) b$

В силу [ВМ, предл. 2.3.2] и л.н. набора $B \Rightarrow$ ∎

Таким образом, поскольку каждый в-р однозн. опр-ся в фикс. базисе своей строкой коорд-т,

каждое лин. отображение однозначно опр-ся своей матрицей (если соотв. базисы фиксированы)

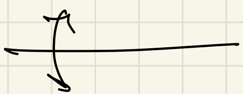
Примеры 1. Проекция на пл-ть Oxy параллельно Oz

$$e_1\varphi = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3$$
$$e_2\varphi = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3$$
$$e_3\varphi = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\varphi]_B$$

или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [\varphi]_{AB}$

2. Осевая симметрия и поворот



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [\varphi] \qquad [\varphi_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

проверить!

Упр. Матрица оператора дифференцирования

в базисе а) $x^n, \dots, x, 1$

б) $\frac{x^n}{n!}, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \dots, x, 1.$

T. 1 Пусть V, U — в.п. размерностей n и m соотв-но. Тогда $\langle \mathcal{L}(V,U), +, \text{„}\times\alpha\text{"} \rangle$ изом. в.п. $M_{m\times n}(F)$, а $\langle \mathcal{L}(V), +, \circ, \text{„}\times\alpha\text{"} \rangle$ изоморфна алгебре $M_n(F)$.

Δ Во: Отоб-е $[\ ]: \mathcal{L}(V,U) \to M_{m\times n}(F)$ (соотв. $\mathcal{L}(V) \to M_n(F)$) — искомый изом-зм.
Инъекция → предл. 2. Сюръекция → пример 5.
Сохранение операций — прямая проверка
см. пример [ВМ2, т. 6.1.1] ∎

Уточним лишь одно из тр. рассуждений:

Лемма (об умножении матриц). Пусть V, U, W — в.п. над F с базами A, B, C соотв-но. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V,U)$, $\psi \in \mathcal{L}(U,W)$ и $[\varphi]_{AB}$, $[\psi]_{BC}$ — матрицы φ и ψ соотв-но. Тогда

$$(3)\quad [\varphi\psi]_{AC} = [\varphi]_{AB}[\psi]_{BC}.$$

Д-во: Пусть $[\varphi]_{AB} = (\alpha_{ij})_{m\times s}$, $[\psi]_{BC} = (\beta_{ij})_{s\times n}$ и $[\varphi\psi]_{AC} = (\gamma_{ij})_{m\times n}$. Имеем $a_i(\varphi\psi) = $

$= \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} c_j$ $\forall i = 1 \dots m$. Кроме того, $a_i(\varphi\psi) =$

$(a_i\varphi)\psi = \left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} b_k\right)\psi = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}(b_k\psi) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} c_j\right)$

$= \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_{ik}\beta_{kj}) c_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kj}\right) c_j \Longrightarrow$

$\forall i, \forall j$ вып-ся $\gamma_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kj} \Rightarrow$

$$[\varphi\psi]_{AC} = [\varphi]_{AB}[\psi]_{BC} \quad \blacksquare$$

<u>Упр</u> Проведите аналогичные рассуждения в системе вектор-столбцу (см. также <u>Винберг</u> или <u>Кострикин</u>)

О связи между лин. об-я в разных базах см. § 6.1 из [ВМ]

<u>Предл 3</u> Если T – м-ца перехода от базиса A к A' в пр-ве V, а S – м-ца перехода от базиса B к B' в пр-ве U и $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$, то $[\varphi]_{A'B'} = T[\varphi]_{AB}S^{-1}$.

В частности, если $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, то $[\varphi]_{A'} = T[\varphi]_A T^{-1}$.

Опр 4 Пусть V, U - в.п. над полем F, $\varphi \in \mathcal{L}(V,U)$.

$\operatorname{Im}\varphi = V\varphi = \{v\varphi \mid v \in V\}$ - образ от-я φ

$\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V \mid v\varphi = 0\}$ - ядро от-я φ.

Т.2 Пусть V, U - в.п. над полем F, $\varphi \in \mathcal{L}(V,U)$.
Тогда 1) $\operatorname{Im}\varphi \leq U$ 2) $\operatorname{Ker}\varphi \leq V$,
3) если $a\varphi = b$, то $x\varphi = b \iff$
$x \in a + \operatorname{Ker}\varphi = \{a + w \mid w \in \operatorname{Ker}\varphi\}$.

Д-во: прямая проверка. $\blacksquare$

Следствие 1 Пусть X — мн-во всех решений совм. системы лин. ур-й $Ax' = b$ и Y — пр-во решений однородной системы $Ax' = 0$. Тогда $X = x^0 + Y$, где x^0 — любое частное решение системы $Ax' = b$.

Д-во: $Y = \operatorname{Ker} \varphi$, где $\varphi : F^n \to F^m$ по правилу $x' \mapsto Ax'$, $x = (x_1 \ldots x_n)$ и m — число ур-й ∎

Следствие 2 Если $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ и $A = [\varphi]$, то
$$\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim V - \operatorname{rk}(A).$$

Д-во: Разм-сть пр-ва решений системы $Ax' = 0$ равна разности между числом неизвестных и числом ур-й в приведенной к ступ. виду той же системы. (см также т. 2.3.2 из [ВИН]) ∎

Т.3 Пусть V, U — к.м. в.п. над полем F, $\varphi \in \mathcal{L}(V,U)$.

Тогда $\dim V = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$.

Δ-во: Выберем базис $e_1, \dots e_k$ в $\operatorname{Ker}\varphi$ и дополним его в-ми $e_{k+1}, \dots e_n$ до базиса V.

Δем, что $e_{k+1}\varphi, \dots e_n\varphi$ — базис $\operatorname{Im}\varphi$.

1) $\forall v \in V$ $\quad v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \Rightarrow v\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i\varphi) = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \alpha_i (e_i\varphi)$,

т.к. $e_i\varphi = 0$ $\forall i = 1, \dots k \Rightarrow \langle e_{k+1}\varphi, \dots e_n\varphi \rangle = \operatorname{Im}\varphi$.

2) Пусть $0 = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i (e_i\varphi)$. Р-м в-р $a = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i$

Имеем $a\varphi = 0 \Rightarrow a \in \operatorname{Ker}\varphi$. Из лин. нез. $e_1 \dots e_n$

$\Rightarrow a = 0$, т.е. $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ ■

Следствие 1 Если $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ и $A = [\varphi]$, то
$$\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk}(A).$$
Д-во: т.3 + следствие 2 из т.2 ∎

Следствие 2 Ранг набора строк м-цы = ранг набора столбцов той же м-цы.

Д-во: Пусть $A \in M_{m \times n}(F)$ и $\varphi_A : F^n \to F^m$ по правилу $x' \mapsto Ax'$, где $x = (x_1 \ldots x_n)$, т.е. $\varphi_A(x') = Ax'$. Тогда, по доказанному, $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi_A(e_1'), \ldots \varphi_A(e_n') \rangle$, где $e_1' \ldots e_n'$ – база пр-ва столбцов F^n $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi =$ ранг набора столбцов м-цы A. Применяя сл. 1, получаем требуемое ∎

Предл 5 а) Если $A, B \in M_{m\times n}(F)$, то $\mathrm{rk}(A+B) \le \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B)$

б) Если $A \in M_{m\times s}(F)$, $B \in M_{s\times n}(F)$, то $\mathrm{rk}(AB) \le r(A)$

и $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(B)$. Если же A (соотв B)

невырожд. кв. м-ца A, то $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(B)$ (соотв. $\mathrm{rk}(AB) = r(A)$)

Д-во: См. Д-во предл. 4.1.3.

Упр Изучить понятие минорного ранга

матрицы и док-ть, что минорный ранг

м-цы $A = \mathrm{rk}(A)$.

(см. § 4.1 из [ВМ] или т. 2.5.3 из [ВИН]

Опр 5 Ранг лин. от-я = ранг м-цы этого от-я

Опр-ль лин. оператора = опр-ль м-цы этого оператора

Упр. Док-ть корректность этих опр-й.