3.2 Базис и размерность в. п.

Пусть V — в. п. над полем F.

Опр1 Если $a_1 \ldots a_s$ — набор A в-ров из V, а $\alpha_1 \ldots \alpha_s \in F$, то (напомним) $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s$ — линейная комбинация набора A с коэф-ми $\alpha_1 \ldots \alpha_s$ (два смысла: выражение и вектор). Лин. комбинация (как выражение) тривиальна, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$, и нетривиальна в противном случае.

Опр2 Набор A из в-ров $a_1 \ldots a_s$ линейно зависим, если $\exists$ нетрив. л. к. в-ров этого набора, равная 0. В противном случае A линейно независим.

Зам. A л. н., если $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0$.

Опр 3 В-р a линейно выражается через набор A в-ров $a_1, \dots, a_s$, если $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_s \in F : a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s$.
(т. е сущ. л.к. набора A, равная a).

Примеры 1. Если $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ для $i = 1 \dots n$.
То набор $e_1, \dots, e_n$ линейно независим. (1 на i-м месте)

2. Набор $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (0,1,2)$, $a_3 = (1,2,3)$ лин. зависим, т.к. $a_1 + a_2 - a_3 = 0$. (здесь $a_3 = a_1 + a_2$)

Предл 1 (критерий лин. зависимости) Набор в-ров $a_1, \dots, a_s$ л.з. $\Longleftrightarrow \exists\, i \in \{1 \dots s\} : a_i$ линейно выражается через $a_1, \dots, a_{i-1}$.

Д-во: см. предл. 3.2.1 из [ВЛ].

„0-вектор (и только он) л.в. через $\varnothing$."

Опр 4. Пусть A и B — наборы в-ров. Набор A линейно выражается через B, если каждый вектор из A линейно выражается через B. Наборы A и B эквивалентны, если A л.в. через B, а B л.в. через A.

Опр 5. Линейной оболочкой набора A из в-ров $a_1 .. a_s$ наз-ся мн-во $L(A) = \langle a_1, \ldots, a_s \rangle =$

$= \{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s \mid \alpha_i \in F\}$, т.е. мн-во всех л.к. (как в-ров) набора A.

Договор: $L(\varnothing) = 0$

$\boxed{\text{Упр 1. Д-ть предл. 2}}$

Предл 2 (Св-ва лин. оболочки) 1) $L(A)$ - подпр-во в V

2) A л.в. через $B \Leftrightarrow L(A) \subseteq L(B)$ и A экв. $B \Leftrightarrow L(A) = L(B)$

3) Если B получен из A элем. преобр, то $L(A) = L(B)$.

Предл 3 (осн. лемма о лин. зависимости). Если V явл. л.о. набора из n в-ров, то всякие m в-ров ($m > n$) линейно зависимы.

Δ во: см предл 2.2.1 из [ВиН].

Предл 4 (об экв. опр-ий базисе) Пусть B набор в-ров $b_1, \dots, b_n$ пр-ва V. След. утв-я эквивалентны.

1) B – базис пр-ва V (каждый в-р $a \in V$ л. в. через B единств. образом)

$\Updownarrow$ предл 1

2) B – лин. незав и $L(B) = V$.

$\Updownarrow$

3) B – макс. л.н. подмн-во в V

4) B – мин. подмн-во в V: $L(B) = V$.

см. Д-во предл 3.2.2 из [ВМ]

Опр6 В.п. V наз-ся конечномерным, если оно порождается конечным набором в-ров.

Т. 1 (о базисе) Пусть V – к.м. в.п над полем F. Тогда

1) V обл. кон. базисом

2) Два базиса пр-ва V состоят из одного и того же числа в-ров

3) Любой линейно незав. набор в-ров пр-ва V можно дополнить до базиса.

Д-во: | следствие (см. сл-е из т.3.2.2 в [ВМ]).

Опр7 Число в-ров в базисе конечномерного в.п. V наз-ся его размерностью. Обозн. $\dim(V)$.

Изоморфизм в.п. одной размерности:

$$\dim_F(V) = \dim_F(U) = n \Rightarrow V \cong F^n \cong U \;!$$

Матрица перехода: $b = Ta \Rightarrow$

$$[x]_A = [x]_B T$$

> Предл. 2.3.2 $\quad Xa = Ya \Rightarrow X = Y$, если a — столбец л.н. в-ров.

Если $b = Ta$ $\quad c = Sb$ и $c = Pa \Rightarrow$

$$c = Pa = Sb = (ST)a \underset{2.3.2.}{\Longrightarrow} P = ST.$$

В частности, если $c = a$, т.е. $P = E$, то

$S = T^{-1}$ (T обратима!) | Упр. 3.2.7 из [ВМ]

~~БДЗ~~ $\longleftrightarrow$ $(GL_n(F))$

Опр 8 Рангом набора в-ров в A наз-ся $\dim L(A)$.

Ранг матрицы A — ранг системы её строк.
Обозн: $r(A)$.

Предл 6 Ранг матрицы равен числу ненулевых строк любой ступенчатой м-цы, к которой она приводится элем. преобразованиями строк

Теор 2 1) (Кронекер-Капелли) Система $Ax' = b$ совместна $\Longleftrightarrow$ $r(A) = r(\tilde{A})$, где $\tilde{A} = (A|b)$ — расширенная матрица A

2) Совм. система $Ax' = b$ от n неизвестных определена $\Longleftrightarrow$ $r(A) = n$.

Д-во: Метод Гаусса ■