


3.3 Взаимно перпендикулярные подпространства (см. [BM] §3.3)

Опр 1' Пусть V - в.п. над F . Подпрост-во U —
взаимно перпендикулярно U^\perp , если $L(U) = U^\perp$.

Л. 1 Пусть $U \leq V$ $\dim V = n$. Тогда

1) $\dim U \leq \dim V$

2) Канонический базис U состоит из $\dim U$ векторов $v_i \in V$

3) Если $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$.

Л. 2: 1) если U бесконечномерно, то \exists в.п.
над U , — $u_1, \dots, u_{n+1}, u_3 \in U$ ($\Rightarrow u_3 \in U$) взаимно перпендикулярны.

$\Rightarrow \dim U \leq \infty$. Аналог. $\Rightarrow \dim U \leq n$.

2) Т. о каноническом базисе \Rightarrow существование кан. базиса U см. § 3.3 [BM]

Т. 4 (о базисе фактор-гр-в). Пусть V -к.м.
 Б.н u $U \leq V$, причем даны e_1, \dots, e_n гр-в U
 заданные по базису $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ гр-в V .
 Тогда гр-в $e_{r+1} + U, \dots, e_n + U$ образуют
 базис фактор-гр-в V/U . В частности, $\dim V/U =$
 $= \dim V - \dim U$.

Д-во. Пусть $x + U$ - произб. гр-в V/U .

Т.к. $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n$, то

$$x + U = \alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n + U = \alpha_{r+1} (e_{r+1} + U) + \dots + \alpha_n (e_n + U).$$

Кроме того, если $\alpha_{r+1} (e_{r+1} + U) + \dots + \alpha_n (e_n + U) = U$,

$$\text{то } \alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n \in U \Rightarrow \exists \beta_1, \dots, \beta_n : \beta_1 e_1 + \dots + \beta_r e_r +$$

$$+ \alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ (и } \beta_i = 0) \Rightarrow \text{л.н.} \quad \square$$

Следствие Если $V = U \oplus W$, то $V/U \cong W$,
а $V/W \cong U$. | Упр. Δ -то следствие.

Упр 6 Послед-ая подпр-ва $\emptyset = U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_m = V$
наз-ся **флагом** подпр-ва пр-ва V размер m .
Флаг наз-ся **максимальным** (с условием P),
если для любой подпр-ва W (с условием P)
такого, что $U_i \subseteq W \subseteq U_{i+1}$ либо $U_i = W$,
либо $U_{i+1} = W \quad \forall i = 0, \dots, m-1$.

Предл. 1 Если $\dim V = n$, то $m \leq n$ для любого
флага подпр-ва в V , а $m = n \Leftrightarrow$ флаг
максимален. Упр Δ -то предл. о флагах.