3. Значения и корни мн-нов

__Опр 1__ Пусть F — поле, $\alpha \in F$, $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in F[x]$

$f(\alpha) = a_n \alpha^n + \ldots + a_0$ — значение f в точке α,

α — корень мн-на $f(x)$, если $f(\alpha) = 0$.

__Предл 1__ Пусть $f, g \in F[x]$, $\alpha \in F$. Тогда

1) $(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$ 2) $(fg)(\alpha) = f(\alpha)\, g(\alpha)$

3) (теорема Безу) Если r — остаток от деления f на $(x-\alpha)$, то $f(\alpha) = r$. В частности,

$(x-\alpha) \mid f \iff f(\alpha) = 0$.

__Док-во:__ Упр 1 ∎

Опр 2 Пусть $f \in F[x]$, $r \in \mathbb{N}_0$. Эл-т $\alpha \in F$ наз-ся корнем мн-на f **кратности** r, если $(x-\alpha)^r \mid f$ и $(x-\alpha)^{r+1} \nmid f$. Корень кратности 1 — **простой**, корень кратности, большей 1, — **кратный**.

Зам! α — корень кратности $0 \Longleftrightarrow f(\alpha) \neq 0$,

Зам 2 Если α — корень кратности r, то мы считаем (и говорим „с учетом кратности"), что f имеет r корней, равных α.

Т. 1 Пусть F — поле. Тогда

1) Ненулевой мн-н степени n имеет не более n корней (с учетом их кратности).

2) Пусть для $i=1..n$ $\alpha_i \in F$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Если степени мн-нов f и g из $F[x]$ меньше n и $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$ $\forall i=1..n$, то $f(x) = g(x)$.

3) Пусть для $i=1..n$ $\alpha_i, \beta_i \in F$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Тогда сущ. и единствен мн-н f такой, что $\deg f < n$ и $\forall i=1..n$ $f(\alpha_i) = \beta_i$. Мн-н f наз-ся интерполяционным мн-ном Лагранжа и опр-ся ф-лой:

$$(1)\quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\ldots(x-\alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_1)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i-\alpha_n)}.$$

Д-во: См. д-во т. 5.3.2 и 5.3.3 в [ВК].

Зам. Если F бесконечно, то из п. 2 т-мы $\Rightarrow$ абстр. определение рав-ва мн-нов $\Leftrightarrow$ опр-ю через рав-во ф-й.

Далее см. § 5.3 из [ВМ].

<u>Замечание</u> к определению производной ф-ии (опр. 5.3.4 из [ВМ]) см. также альтернативный путь ([ВИН] стр. 100).