Лекции по алгебре

Дополнительные материалы

лектор

Васильева А.В.

2.7. Поле комплексных чисел

Опр 1 Полем комплексных чисел наз-ся поле $\mathbb{C}$, удовл. след. условиям:

1) $\mathbb{C}$ содержит в качестве подполя поле R, изоморфное полю $\mathbb{R}$ действ. чисел.
2) $\mathbb{C}$ содержит элемент i (мнимая единица) такой, что $i^2 = -1$, где -1 - эл-т, противопол. единице поля $\mathbb{C}$, а значит и R, 43 п. 1.
3) $\mathbb{C}$ минимально среди полей с этими свойствами, т.е. если $K \subset \mathbb{C}$ - подполе, содержащее R и i, то $K = \mathbb{C}$.

Теорема 1 Поле $\mathbb{C}$ существует и единственно с точностью до изоморфизма. Каждое компл. число однозн. представл. в виде $a+bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ (из п. 1), а i — мнимая единица (из п. 2).

Д-во: Д-во см. [ВМ, т. 2.5.1]. Заметим, что из возможности представления любого компл. числа $z = a+bi$ следует, что всякое подполе K в $\mathbb{C}$, содержащее $\mathbb{R}$ и i совпадает с $\mathbb{C}$.

Следствие $\mathbb{C}$ — алгебра (ассоц. и комм.) размерности 2 над полем $\mathbb{R}$.

Далее по [ВМ] вплоть до конца параграфа.

Упр 2.7.3 Доказать, что в алгебре $M_2(\mathbb{C})$, рассматриваемой как алгебра над $\mathbb{R}$, подмн-во

$$\mathbb{H} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C} \right\}, +, \circ, \text{„}\times\alpha\text{"} \right\rangle$$

— ассоциативная (но не коммутативная), алгебра с делением (т.е $\langle \mathbb{H}, \circ \rangle$ — группа).

Она наз-ся алгеброй кватернионов.

Д-те, что в $\mathbb{H}$ имеется базис $1, i, j, k$ (т.е. она размерности 4 над $\mathbb{R}$) со следующей таблицей умножения:

×	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	−1	k	−j
j	j	−k	−1	i
k	k	j	−i	−1

Является ли $\mathbb{C}$ — подалгеброй алгебры $\mathbb{H}$. Найдите группу автоморфизмов алгебры $\mathbb{H}$.

<u>Посл. замечание</u>: В будущем мы докажем, что каждая конечномерная ассоциативная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$ изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{H}$ (т-ма Фробениуса, 1877).

③ Начала линейной алгебры

1. Системы линейных уравнений

Опр 1 Пусть F — поле. Линейное уравнение с неизвестными $x_1, \ldots x_n$ над полем F — это выражение вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \qquad + a_n x_n = b,$$

где коэффициенты $a_1, \ldots a_n$ и свободный член b — элементы поля F. Ур-е наз-ся однородным, если $b = 0$.

Упорядоченный набор таких уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

называют системой линейных уравнений от неизвестных $x_1, \ldots x_n$ над полем F.

Система (1) однородна, если все ур-я этой системы однородны.

Эл-ты a_{ij} — коэф-ты, b_i — свободные коэф-ты системы (1).

Опр 2. Строка $x^0 = (x_1^0, \ldots x_n^0) \in F^n$ наз-ся **решением** системы (1), если $\forall i = 1..n$, $a_{i1} x_1^0 + a_{i2} x_2^0 + \ldots + a_{in} x_n^0 = b_i$. Система (1) **совместна**, если она имеет хотя бы одно решение, и **определена**, если имеет ровно одно решение. Если решений нет, то система (1) **несовместна**. Две системы линейных уравнений от одного и того же набора переменных над одним и тем же полем **эквивалентны**, если множества их решений совпадают.

Пусть $\tilde{a}_j = (a_{1j}, \dots a_{mj})'$ – столбец коэф-тов системы (1) при неизвестной x_j, $j = 1..n$, а $b = (b_1, \dots b_m)'$ – – столбец свободных коэф-тов. Тогда систему (1) можно записать в векторной форме:

$$x_1 \tilde{a}_1 + x_2 \tilde{a}_2 + \dots + x_n \tilde{a}_n = b \qquad (2)$$

Зам: линейная комбинация „векторов" $\tilde{a}_1, .. \tilde{a}_n$ пространства K^m равна „вектору" b.

Матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$ наз-ся матрицей коэф-тов системы 1. Запись вида

$$Ax' = b, \qquad (3)$$

где $x' = (x_1 \dots x_n)$ – столбец неизвестных, называется матричной формой системы (1).

Матрица размера $m \times (n+1)$ $\tilde{A} = (A \mid b)$ наз-ся расширенной матрицей системы (1).

Опишем классический способ поиска решений системы — метод Гаусса.

Элементарные преобразования системы (1) (и строк расширенной матрицы):

1) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на скаляр;
2) умножение уравнения на ненулевой скаляр
3) перестановка двух уравнений.

Упр 1 Умножению на какую матрицу слева соответствует преобразование 3-го типа?

Предл 1 При элементарных преобразованиях системы лин. уравнений множество её решений не меняется.

Д-во: Если x^0 — решение исходной системы, то x^0, очевидно, решение „новой системы", полученной из исходной элем. преобраз.

С другой стороны, все элем. преобразования обратимы, так как обратимы м-цы, соответствующие элем преобразованиям.

$$Ax' = b \xrightarrow[\text{элем}]{} Cx' = d \iff C = E_1 \dots E_k A$$

$$\iff A = E_k^{-1} \dots E_1^{-1} C \iff Cx' = d \xrightarrow[\text{элем}]{} Ax' = b \quad \blacksquare$$

Опр 3 **Ведущим** наз-ся первый слева ненулевой эл-т ненулевой строки матрицы. Матрица наз-ся **ступенчатой**, если выполнены след. условия:

1) номера столбцов ведущих элементов ненулевых строк образуют строго возрастающую пос-ть;
2) нулевые строки, если они есть, стоят в конце.

Таким образом, ступенчатая м-ца имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & a_{2j_2} & \dots & \dots & \dots \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a_{rj_r} & \dots \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Здесь $a_{1j_1}, \dots a_{rj_r}$ – ведущие эл-ты ненулевых строк, т.е. $j_1 < j_2 < \dots < j_r$, а строки, начиная с $(r+1)$-ой нулевые.

Ступенчатая матрица наз-ся **унифицированной**, если выполнены след. условия:

1) ведущие элементы её ненулевых строк = 1;

2) все эл-ты каждого столбца, содержащего ведущий эл-т, кроме самого ведущего эл-та, равны 0.

<u>Теорема 1</u> Каждая прямоугольная матрица элементарными преобразованиями приводится к ступенчатому и даже унифицированно ступенчатому виду.

<u>Д-во:</u> см. д-во предл 7.1.2 из [ВМ] или т-мы 2.1.1 из [ВИН] для ступ. вида

Упр 2. Д-ть для унифицированно ступ. вида.

Опр 4 Система лин. уравнений (унифицированная) ступенчатая, если её расширенная м-ца (унифицированная) ступенчатая.

Приведем расширенную м-цу $\tilde{A} = (A|b)$ системы (1) к униф. ступенчатому виду $\tilde{C} = (C|d)$. При этом к унифицированному ступ. виду C приведена и м-ца A коэф-тов системы (1).

Обозначим через r (соотв. $\tilde{r}$) — число ненулевых строк м-цы C (соотв. $\tilde{C}$). Возможны три случая: 1) $\tilde{r} = r+1$ 2) $\tilde{r} = r = n$ 3) $\tilde{r} = r < n$.

1) $\tilde{r} = r+1$. В этом случае система $Cx' = d$ содержит уравнение вида $0x_1 + 0x_2 + \dots 0x_n = b$, где $b \neq 0$, а значит, несовместна, как и эквивалентная ей исходная система (*).

2) $\tilde{r} = r = n$. Здесь $C = E$ — единичная матрица размерности n. Поэтому система $Cx' = d$ имеет вид $x_1 = d_1, \dots x_n = d_n$, а значит, как и исходная система (*) явл-ся определенной, т.е. имеет единственное решение.

3) Пусть $\tilde{r} = r < n$ и $j_1, \dots j_r$ — номера столбцов ведущих элементов ненулевых строк. Назовем неизв. $x_{j_1}, \dots x_{j_r}$ связанными, а остальные неизвестные — свободными.

Перенесём все свободные неизв. системы $Cx' = d$ вместе со стоящими перед ними коэф-ми в правую часть. Получим общее решение системы (1):

$$
\begin{cases}
x_{j_1} = -c_{1 j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - c_{1 j_{r+2}} x_{j_{r+2}} - \dots - c_{1 j_{n-r}} x_{j_{n-r}} + d_1 \\
x_{j_2} = -c_{2 j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - c_{2 j_{r+2}} x_{j_{r+2}} - \dots c_{2 j_{n-r}} x_{j_{n-r}} + d_2 \\
\vdots \\
x_{j_r} = -c_{r j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - c_{r j_{r+2}} x_{j_{r+2}} - \dots c_{r j_{n-r}} x_{j_{n-r}} + d_r .
\end{cases}
\quad (5)
$$

Каждое частное решение системы (1) может быть получено теперь след. образом. Выберем произв. образом в поле F значения своб. неизв. $x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_{n-r}}$. Выразим из. (5) через них все связанные переменные. Полученная n-ка — решение (1).

Заметим, что в системе однородных уравнений всегда $\tilde{r} = r$, т.е такая система всегда совместна. Действительно, такая система всегда имеет нулевое решение (строка, состоящая из нулей).

Важным теоретическим следствием метода Гаусса явл-ся след. утверждение:

Теорема 2 Каждая система однородных лин. уравнений, число уравнений в которой меньше числа неизвестных имеет ненулевое решение.

В дальнейшем мы поймем, что число ненулевых уравнений в ступенчатой системе, экв. исходной, не зависит от способа приведения.

Теорема 3 Пусть система (1) имеет кв. $(n \times n)$-м-цу A коэффициентов и $\det(A) \neq 0$. Тогда система имеет единств. решение $x^0 = (x_1^0, \dots x_n^0)$, кот. можно найти по формулам (они наз-ся ф-лы Крамера):

$$x_i^0 = \frac{d_i}{d}, \quad i = 1 \dots n, \tag{6}$$

где $d = \det(A)$, а d_i — опр-ль м-цы, получен-ной из A заменой i-го столбца A на столбец свободных коэффициентов b.

Д-во: см. д-во т. 4.2.3 из [ВМ].