(4) Начала коммутативной алгебры

1. Определение алгебры мн-нов и его простейшие св-ва

Мн-н $f(x)$ над $\mathbb{R}$ — это ф-ция вида:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Мы знаем как складывать, умножать и умножать на скаляр такие ф-ции. Более того, мы знаем, что $\langle \mathbb{R}[x], +, \cdot, \cdot\alpha \rangle$ — алгебра над $\mathbb{R}$. Мы хотим развить общую теорию мн-нов. Что имеет смысл уточнить.

Зам 1 Рав-во мн-нов $\neq$ рав-во соотв. ф-ций

Пример над $\mathbb{Z}_2$ $x = x^2$ как функц.

Зам 2 Рассматривая мн-ны над кольцом R разумно считать, что R – ассоц. комм. кольцо с единицей. Всюду далее в этой части мы это предполагаем.

Кольцо R наз-ся целостным (областью целостности), если R – асс., комм. кольцо с единицей без делителей нуля.

Пример $\mathbb{Z}$, любое поле.

Зам 3 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Опр 1 Многочлен f от переменной x над кольцом R (асс. комм. и с 1) – это выражение вида

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{N}_0} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_k x^k + \ldots,$$

где $a_k \in R$ и лишь конечное их число отлично от нуля.

Степень мн-на f – это наиб. число $k\in\mathbb{N}_0$: $a_k \neq 0$. Обоз: $\deg f$.

Старший коэф-т a_k, где $k=\deg f$.

Свободный коэф-т a_0.

$R[x]$ – мн-во всех мн-нов от x над R.

Отождествляя $a_0 x^0 = a_0$, получаем вложение R в $R[x]$

Зам. Мн-н $0=\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 0\cdot x^k$ нулевой, $\deg 0$ не определена.

Опр 2 Мн-ны $f(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} a_k x^k$ и $g(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} b_k x^k$ РАВНЫ, если $\forall k\in\mathbb{N}_0\quad a_k=b_k$.

(В частности, $x\neq x^2$ даже над $\mathbb{Z}_2$).

Опр 3 Мн-ны $h(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} c_k x^k$ и $p(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} d_k x^k$ наз-ся суммой $f+g$ и произведением fg мн-нов f и g, если $\forall k\in\mathbb{N}_0\quad c_k=a_k+b_k$ и $d_k=\sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$.

Мн-н $(\alpha f)(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0}\alpha a_k x^k$ наз-ся произведением эл-та $\alpha\in R$ и мн-на $f\in R[x]$.

Предл 1 Пусть $f,g\in R[x]$, $f,g\neq 0$, $\alpha\in R$ $\alpha\neq 0$.
Тогда 1) $\deg(f+g)\leq\max\{\deg f,\deg g\}$

2) $\deg fg\leq\deg f+\deg g$, $\deg(\alpha f)\leq\deg f$ и это равенства, если R — кольцо без делителей нуля.

Упр1 Д-ть предл 1 (исходя из опр 1, 2, 3).

Т. 1 1) Если R - асс. комм. кольцо с 1, то $R[x]$ тоже

2) Если R - целостное кольцо, т $R[x]$ тоже

3) Если F - поле, то $F[x]$ - алгебра над F.

Д-во: Вытекает из определений и предл. 1.

Упр 2 Д-ть Т. 1 полностью.

$F[x]$ не явл-ся полем, т.к любой мн-н f, для которого $\deg f \geq 1$ необратим (см. предл 1)

Т. 2 (о делимости с остатком) Пусть F - поле, $f, g \in F[x]$ и $g \neq 0$. Тогда $\exists!\, q, r \in F[x]$ такие, что $f = pq + r$ и либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg g$.

Д-во: (см т. 5.2.1 из [ВМ] или т. 3.1.2 из [ВИН]).

Мн-ны q и r из т. 2 наз-ся неполным частным и остатком соот-но.

Особое значение имеет деление на мн-ны вида $x - c$ (см. т-му Безу и схему Горнера в конце § 1 гл. 3 из [ВИН]).