① Коммутативная алгебра

1. Абелевы группы

Напоминания (см. гл. 9 из [ВАМ]): $G = \langle M \rangle$ – группа G порождается своим подмн-вом M.
G конечно порождена (к.п.), если $\exists M : |M| < \infty$.

Опр 1 Пусть $\mathcal{K}$ – класс групп. Группа $F = \langle x_i \mid i \in I \rangle$ из $\mathcal{K}$ – свободная группа в классе $\mathcal{K}$ со свободными порождающими мн-вом $\{x_i \mid i \in I\}$, если $\forall\ G \in \mathcal{K}$ с порожд. мн-вом $\{a_i \mid i \in I\}$ отоб-е $x_i \mapsto a_i$, $i \in I$, индуцирует гомоморфизм из F в G.

Мощность мн-ва I наз-ся *рангом* (ил. *степенью свободы*) группы F.

ЗАМ. Не в каждом классе групп есть свободная. Но в классе абелевых групп имеется очень естественное описание таких групп. Мы ограничимся здесь случаем конечно порожденных абелевых групп.

Далее все группы абелевы, поэтому запись аддитивная.

Напоминание: $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n = \bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ — прямая сумма абелевых групп (см. гл. 9 [ВАМ]).

Опр2 Подмн-во $X=\{x_i \mid i\in I\}$ - БАЗА, к.п. абелевой гр. G, если $\forall g\in G$ сущ. единств. представление

$$g=\sum_{i\in I}\alpha_i x_i,$$ где $\alpha_i\in\mathbb{Z}$.

Зам. Группа $\mathbb{Z}_n$ не обл. базисом!

Т.1 Пусть F — к.п. абелева группа. След. утв-я экв-ны

1) F — свободная группа ранга n

2) $F\simeq\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}}_{n\text{ раз}}$

3) F обладает базисом из n элементов.

Д-во: 2) ⇒ 1) Пусть $G=\langle a_1,\ldots a_n\rangle$ - n-порожд. абелева группа и $F=\langle x_1\rangle\oplus\ldots\oplus\langle x_n\rangle\simeq\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}}_{n\text{ раз}}$

Отоб-е $\varphi: F \to G$, $\sum k_i x_i \to \sum k_i a_i$ – гом-зм $\Rightarrow$ F свободная.

1) $\Rightarrow$ 2) Пусть F' – св. абелева гр. со своб. порожд. мн-вом $\{x_1', \ldots x_n'\}$. По опр-ю сущ. гом-зм $\psi: F' \to F = \langle x_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x_n \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$, отправл. x_i' в x_i, $i = 1..n$. По доказанному выше, $\exists \varphi: F \to F'$, – гом-зм, отпр. x_i в x_i'. Тогда $x_i' \psi \varphi = x_i'$ $\forall i = 1..n$
$\Rightarrow \psi\varphi = id_{F'} \Rightarrow \psi = \varphi^{-1}$ обратим $\Rightarrow \psi$ – изоморфизм.

2) $\Rightarrow$ 3) Базис: $(0, \ldots \underset{i}{1} \ldots 0)$ по всем i.

3) $\Rightarrow$ 2) Если $x_1 \ldots x_n$ – базис, то $\langle x_i \rangle \simeq \mathbb{Z}$ $\forall i = 1..n$ и $F \simeq \langle x_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x_n \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ ∎

Т. 2 (о нормальной форме Смита для целочисленных м-ц) см. предл. 9.1.1 из [ВИН].

Упр 1 Форма Смита определяется однозначно см. задачу 9.1.3 из [ВИН].

Т. 3 (о свободе) Пусть F - своб. абелева группа ранга n, а H - подгруппа гр. F. Тогда H - своб. группа ранга $m \leq n$. Более того, найдутся базисы $x_1 \dots x_n$ группы F и $y_1 \dots y_m$ группы H, для которых $y_i = d_i x_i$, $d_i \mid d_{i+1}$, где d_i $i = 1 \dots m$

Д-во: т. 9.1.3 и 9.1.5 из [ВИН] (о группах беск. ранга см. [КМ] §7 и 8.)

Зам. В отличие от В.п. возможно, что $\operatorname{rk} H = \operatorname{rk} F$, но $H \neq F$. Например. $2\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ – группы ранга 1.

Напоминание; если $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s} \in \mathbb{N}$, то

$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}$ См. §9.5 из [ВАМ].

Т.4 Каждая конечно порожд. абелева группа G раскл. в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп, причем набор порядков этих подгрупп определен однозначно.

Опр 3 Этот набор — тип к.п. абелевой группы.

Д-во: См. например. Д-во Т. 9.1.6 из [ВАН].

Пример 1 Разложить в прямую сумму цикл. групп фактор-группу $G = F/H$, где F – своб. абелева гр. с базисом x_1, x_2, x_3, а H – её подгруппа, порожденная эл-ми y_1, y_2, y_3, где

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \\ y_2 = 8x_1 + 9x_2 + x_3 \\ y_3 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

(зад. 60.52 б) из [К3]).

Решение: Приведем м-цу $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ к норм. форме Смита элем. пр-ями строк и столбцов (см. Т.2). Имеем $A \sim D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Значит, можно выбрать базис x_1, x_2, x_3 в F и порождающие y_1, y_2, y_3 в H так, что $y_1 = x_1$, $y_2 = 4x_2$, $y_3 = 0$. Поэтому

$$G \simeq \langle x_1 + H \rangle \oplus \langle x_2 + H \rangle \oplus \langle x_3 + H \rangle =$$

$$= \langle x_1 + \langle x_1 \rangle \rangle \oplus \langle x_2 \oplus \langle 4x_2 \rangle \rangle \oplus \langle x_3 \rangle \simeq$$

$$\simeq \mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z} \ \blacksquare$$