3. Тензорная алгебра

Всюду в этом параграфе A – алгебра с 1 (но не обязательно ассоц. или комм.) над полем F, V – в.п. разм-сти n над полем F,

Предл 1 Если $*$ – умножение в A, то $\varphi : A^p \to A$ по правилу $\varphi(a_1, \ldots a_p) = a_1 * \ldots * a_p$ – p-линейная операция, а значит, сущ-ет единств. лин. от-е $\psi : \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{p} \to A$ такое, что $\psi(a_1 \otimes \ldots \otimes a_p) = a_1 * \ldots * a_p$.

Следствие Задать на в.п. A структуру F-алгебры – это то же самое, что задать на A тензор γ типа $(2,1)$ (структурный тензор), где $e_i * e_j = \gamma_{ij}^k e_k$, $\{e_i\}$ – базис в.п. A.

Д-во: Применить предл. 1 при $p = 2$ и вспомнить, что $Hom(A \otimes A, A) \simeq A \otimes A^* \otimes A^*$ ■

Опр 1 Пусть V_i, $i = 0, 1, \dots$, — посл-сть в.п. над полем F. **Прямой суммой** $\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} V_i$ этих пр-в наз-ся мн-во всех **финитных** посл-стей $(x_0, x_1, \dots)$, где $x_i \in V_i$ и лишь конечное число x_i отл. от 0.

Предл 2 $\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} V_i$ — в.п. над полем F, причём если $\{e_{ij}, j \in J\}$ — базис V_j, то $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \{e_{ij}\}$ — базис $\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} V_i$.

Напомним, что из опр-я тензорного пр-я $\Rightarrow$

$$T^p_q(V) \otimes T^r_s(V) \subseteq T^{p+r}_{q+s}(V). \qquad (*)$$

Пусть $T^p(V) = T^p_0(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p \text{ раз}}$ — пр-во p-контравариантных тензоров над V.

<u>Предл 3</u> В.п. $T(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(V)$ над F явл-ся алгеброй отн-но операции тензорного пр-я.

<u>Д-во</u> Вытекает из $(*)$. $\boxed{\text{Напомним, что } T^0(V) = F}$

<u>Опр 2</u> $T(V)$ — тензорная алгебра пр-ва V.

Аналогично, $T_*(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T_q(V)$ — алгебра полилинейных ф-ций над V. В ней для $\alpha \in T_i(V)$, $\beta \in T_j(V)$

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1 \ldots x_{i+j}) = \alpha(x_1 \ldots x_i)\beta(x_{i+1}, \ldots x_{i+j}) \qquad (**)$$

Ф-ла $(**)$ определяет тензорное произведение.

Т.к. $\dim V = n < \infty$, то $T_q(V) = T^q(V^*) \Rightarrow$

$T_*(V) = T(V^*)$ — тензорная алгебра над V^*.

Упр 1 Алгебра $T(V)$ ассоциативная алгебра с 1 (некоммутативная).

Ключевое св-во тензорной алгебры — её универсальность

T. 1 Пусть V (к.м.) в.п. над F, A — произвольная ассоц. (с 1) алгебра над F. Тогда каждое лин. от-е $\varphi: V \to A$ един. образом продолжается до гом.зма алгебр $\psi: T(V) \to A$, т.е $\psi \circ i = \varphi$, где i — естеств. вложение V в $T(V)$.

Следствие Если $\varphi: V \to A$ сюръективно, то $A = \psi(T(V))$.

Неформально, любая к.м. ассоц. алгебра с 1 — гомоморфный образ тензорной алгебры подходящего пр-ва V. (можно взять $V = A$).

Д-во теоремы: По лин. от-ю $\varphi: V \to A$ однозначно строится p-лин. от-е $\varphi_p: V^p \to A$ по правилу $\varphi_p(x_1, \ldots x_p) = \varphi(x_1) * \ldots * \varphi(x_p)$, где $*$ - операция умножения в A (см. предл. 1). В силу осн. принципа тензорной алгебры сущ. единств. лин. от-е $\psi_p: T^p(V) \to A$ т.ч. $\psi_p(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) = \varphi(x_1) * \ldots * \varphi(x_p)$

Положим также, что $\psi_0(\alpha) = \alpha\cdot 1 \in F\cdot 1 \subseteq A$.

Опр-е $\psi : T(V) \to A$ т.ч. $\psi = \bigoplus\limits_{p=0}^{\infty} \psi_p$, действующее по правилу $\psi(\alpha_0 + v_1 + v_2^1 \otimes v_2^1 + v_3^1 \otimes v_3^2 \otimes v_3^3 + \dots)$ $= \psi_0(\alpha_0) + \psi_1(v_1) + \psi_2(v_2^1 \otimes v_2^1) + \dots$ — искомый гом-зм (вытекает из опр-й). Он определен единств. образом, т.к. определен единств. образом на $T^p(V)$ $\forall p$ и потому что $T(V)$ — прямая сумма этих пр-в ∎

<u>Упр 2</u> Если $\dim V = n$, то $T(V)$ изоморфна алгебре мн-нов $F[[x_1 \dots x_n]]$ от некоммутирующих переменных ($x_i x_j \neq x_j x_i$ при $i \neq j$).

На этом языке любая к.м. ассоц. алгебра A с $\mathbb{1}$ изоморфна фактор-алгебре $T(V)/I$, где $T(V)$ – алгебра (некомм.) мн-нов, а $I = \operatorname{Ker} \varphi$ – идеал, порожд. некоторым набором $\{f_i\}$ таких мн-нов. (вспомните про базис Грёбнера – Ширшова!), Таким образом, алгебры можно задавать (как и группы) набором порождающих $a_i = \varphi(x_i)$ и определяющих соотношений $f_i(x_1, \ldots x_n)$:

$$A = \langle a_1, \ldots a_n \mid f_i(a_1, \ldots a_n) = 0 \rangle_{\text{алг.}}$$

В этом смысле $T(A)$ – свободная n-порожд. ассоциативная алгебра.

Упр 3 Задать через „порожд. и опред. соотн-я"

а) „обычное" кольцо $F[x,y]$ от коммутирующих переменных;

б) алгебру матриц $M_n(F)$.

Упр 4* Д-те, что $M_n(F)$ порождается (как алгебра) 2 эл-ми.