3. Коммутант и разрешимые группы.

Напомним, что **коммутатором** элементов x, y гр. G наз-ся элемент $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Предл 1 Если $x, y, z \in G$, то

1) $[x,y]^{-1} = [y,x]$, 2) $[xy, z] = [x,z]^{y}[y,z]$,

3) $[x, yz] = [x,z][x,y]^{z}$.

Д-во: прямая проверка ∎

Опр 1 Пусть $L, M \leq G$. **Взаимным коммутантом** L и M наз-ся подгруппа $[L,M] = \langle [x,y] \mid x \in L, y \in L \rangle$.

Подгруппа $G' = [G,G]$ наз-ся **коммутантом** группы G.

Зам. Коммутант гр. G порождается коммутаторами, но не обязательно состоит только из них см. пример 3.29. из [КМ].

Предл 2 Пусть $H, K \leq G$. Тогда

1) $[H, K] = [K, H]$, 2) $[H, K] \trianglelefteq \langle H, K \rangle$,

3) H нормализует $K \Leftrightarrow [H, K] \leq K$,

4) если H абелева, $N \trianglelefteq G$, то $[HN, HN] \leq N$.

Д-во: 1) вытекает из предл 1 п. 1. 2) из п. 2 того же предл. 3) см. 3-е опр. е норм. подгруппы

4) легко док-ся с помощью 3) и п. 2 предл 1 $\blacksquare$

Заметим также, что из опр-я гомоморфизма

вытекает, что $[x^\varphi, y^\varphi] = \overline{[x,y]}^\varphi$ $\forall x,y \in G$ и для любого гом-зма $\varphi: G \to \overline{G}$, $\underline{x \mapsto \overline{x}}$. Поэтому $[H^\varphi, K^\varphi] = [H,K]^\varphi$ $\forall H,K \le G$ и $\overline{[G,G]} = [\overline{G},\overline{G}]$, если $\overline{G} = G^\varphi$. В частности, G' — характеристическая подгруппа.

<u>Т. 1</u> Пусть $K \trianglelefteq G$. Группа G/K абелева $\Leftrightarrow G' \le K$

<u>Д-во:</u> $\Rightarrow$) Пусть $\underline{\pi: G \to \overline{G} = G/K}$ - канон. гом-зм

Тогда $[G,G]^\pi = \overline{[G,G]} = [\overline{G},\overline{G}] = 1$, т.к. $\overline{G}$ абелева

Поэтому $G' \le \operatorname{Ker}\pi = K$

$\Leftarrow$) Пусть $\overline{G} = G/G'$ и $\pi: G \to \overline{G}$ - канон. гом-зм.

Тогда $[\overline{G},\overline{G}] = \overline{[G,G]} = \overline{1} \Rightarrow \overline{G} = G/G'$ абелева $\blacksquare$

Т. 2 (1) Группа A_n порождается циклами длины 3 при $n \geq 3$ и произведениями пар незав. транспозиций при $n \geq 5$.

(2) Группа $A_n = \langle (123)^g \mid g \in A_n \rangle$ при $n \geq 5$.

(3) $[S_n, S_n] = A_n$ при любом n;

(4) $[A_n, A_n] = A_n$ при $n \geq 5$ + $\boxed{\begin{array}{l} [A_4, A_4] = K_4 \text{ и} \\ [A_n, A_n] = 1 \text{ при } n \leq 3 \end{array}}$

Д-во: 1) Т.к S_n порожд. транспозициями при $n \geq 2$, то A_n порождается парами транспозиций (не обязательно незав). Поэтому (1) вытекает из след. рав-в
$(ij)(jk) = (ikj)$, $(ij)(kl) = (jkl)(ijk)$ и
$(ij)(jk) = ((ik)(lm))((kj)(lm))$, здесь i, j, k, l, m - разл. символы

(2) Эл-т $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ i & j & k & l & m & \dots \end{pmatrix} \in S_n$: $(123)^h = (ijk)$

Если $\operatorname{sgn} h = 1$, то $g = h \in A_n$, если $\operatorname{sgn} h = -1$, то

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i & j & k & m & l \end{pmatrix} \in A_n$ – искомый.

(3) При $n=1$ очевидно. При $n \geq 2$ $|S_n : A_n| = 2 \Rightarrow$
S_n / A_n абелева $\Rightarrow [S_n, S_n] \leq A_n$. При $n=2$ $A_n = 1$.
При $n=3$ S_3 неабелева $\overset{\text{т.1.}}{\Rightarrow} [S_3, S_3] \neq 1 \Rightarrow$
$[S_3, S_3] = A_3$. В частности, цикл $(123) \in A_3$
порождается коммутаторами эл-тов из S_3. Аналогич-
но любой цикл (ijk) длины 3 порожд. коммутато-
рами эл-тов из $S(\{i, j, k\}) \leq S_n$ при $n \geq 3$.

(4) В A_4 есть только одна нетрив. собств. норм. подгр. K_4 (подгруппа Клейна). Т.к. A_4 неабелева, а A_4/K_4 абелева, то $[A_4, A_4] = K_4$. В частности, все пары незав. циклов (типа $(12)(34)$) из A_4 лежат в коммутанте. Поэтому любая пара незав. транспозиций лежит в A_n при $n \geq 4$. Но при $n \geq 5$ они порожд. A_n в силу п. 1 ∎

<u>Т.3</u> Пусть F — поле, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(1) $SL_n(F)$ порождается трансвекциями $t_{ij}(\alpha)$, $\alpha \in K$

(2) $SL_n(F) = \langle t_{1j}(\alpha)^g \mid j = 2, \ldots, n, \alpha \in F, g \in SL_n(F) \rangle$.

(3) $[GL_n(F), GL_n(F)] = SL_n(F)$, если $(n, |F|) \neq (2,2)$.

(4) $[SL_n(F), SL_n(F)] = SL_n(F)$, если $(n, |F|) \neq (2,2), (2,3)$.

Замечание Поле F – любое, не обяз. конечное.

Д-во: (1) В т. не о разложении на элем. (трансвекции) и диаг. м-цы уточнить, что если исходная м-ца невырождена, то можно привести к $D = \mathrm{diag}(1, \dots 1, d)$, где d – определитель исходной м-цы.

(2) Сопряжь $t_{ij}(\alpha)$ м-цей перехода от базиса $e_1 e_2 \dots e_i \dots e_n$ к $e_i e_2 \dots e_1 \dots e_n$.

(3 и 4) $GL_n(F)/SL_n(F) \cong F^*$ – абелева $\overset{\text{т. 1}}{\Rightarrow} GL_n(F)' \leq SL_n(F)$.

Включение $SL_n(F)' \leq SL_n(F)$ очевидно.

Легко проверить след. ф-лу:

(*) $[t_{ik}(\alpha), t_{kj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta)$ при разл. i, j, k.

В силу неё обратное включения верно при $n \geq 3$.

Пусть $n = 2$. Имеем

$$[t_{12}(\alpha), \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2)] = t_{12}\left(\alpha\left(\frac{\beta_2}{\beta_1} - 1\right)\right).$$

При $|F| > 2$ можно взять $\beta_1 \neq \beta_2$ и все доказано в 3.

При $|F| > 3$ можно взять $\beta_1 \neq \beta_2$ и $\beta_1\beta_2 = 1$, что завершает док-во 4 ∎

<u>Упр 1</u> Вычислите коммутанты $GL_2(2) = SL_2(2)$ и $SL_2(3)$.

Опр 2 Положим $G = G^{(0)}$, $G^{(1)} = G'$. Группа $G^{(k)} = (G^{(k-1)})'$ при $k \geqslant 2$ наз-ся к-ым коммутантом группы G.

Пример $G = S_4$, $G^{(1)} = A_4$, $G^{(2)} = K_4$, $G^{(3)} = 1$.

$G = S_n$, $G^{(1)} = A_n = G^{(2)} = G^{(3)} = \ldots = G^{(\infty)} = A_n$ при $n \geqslant 5$.

Опр 3 Группа G наз-ся разрешимой, если $\exists m \in \mathbb{N}$: $G^{(m)} = 1$.

Т. 4 Группа разрешима тогда и только тогда, когда выполняется одно из экв-ных утв-й.

(1) $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_k = 1$, $G_i \trianglelefteq G$ и G_{i-1}/G_i абелева $\forall i = 1 \ldots k$

(2) $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \quad \geqslant G_t = 1$, $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$ и G_{i-1}/G_i абелева $\forall i = 1 \ldots t$.

Д-во: Т.к. $(G^{(k)})^{\varphi} = (G^{\varphi})^{(k)}$ для любого гом-зма φ, то $G^{(i)} \trianglelefteq G$ $\forall i = 1..m$. В силу т. 1 $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ абелева. Поэтому из разрешимости $G \Rightarrow (1)$.

Очевидно, что из $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть, наконец, в G есть ряд (2). Тогда снова в силу т. 1 $G^{(1)} = G' \leq G_1$. Далее $G^{(2)} = [G^{(1)}, G^{(1)}] \leq [G_1, G_1] \underset{\text{т. 1}}{\leq} G_2$ и т.д. Таким образом,

$$G^{(i)} \leq G_i \quad \forall i = 1..t \Rightarrow G^{(t)} = 1 \quad \blacksquare$$

<u>Следствие</u> Пусть $K \trianglelefteq G$. Группа G разрешима $\Longleftrightarrow$ K и G/K разрешимы. Упр 2 Д-ть <u>следствие</u>

Упр3 Доказать, что группа невырожденных треугольных матриц над произвольным полем разрешима.

Напомним, что для группы G её центр

$$Z(G) = \{ z \in G \mid zg = gz \ \forall g \in G \}.$$

— это всегда нормальная абелева подгруппа в гр. G.

Опр4 Положим $Z_0 = Z_0(G) = 1$, $Z_1 = Z_1(G) = Z(G)$ и $Z_k(G)$ — полный прообраз в G группы $Z(G/Z_{k-1}(G))$ при $k \geq 2$. Ряд нормальных подгрупп

$$1 = Z_0 \leq Z_1 \leq \ldots \leq Z_k \leq \ldots$$

наз-ся верхним центральным рядом группы G.

Группа G наз-ся нильпотентной, если $\exists m \in \mathbb{N}: Z_m(G) = G$.

Предл 3 Нильпотентная группа разрешима.

Док-во: вытекает из определений и п.2 Теоремы 4.

Упр 4 Привести пример нenильпотентной разр. группы.

Т.5 (1) Если G — конечная p-группа и $K \trianglelefteq G$, то $Z(G) \cap K \neq 1$. В частности, $Z(G) \neq 1$

(2) Конечная p-группа нильпотентна и, в частности, разрешима

Док-во: Группа G действует сопряжениями на группе K. По т. 9.6.1 из [ВЛМ] длина любой орбиты O_i этого действия делит порядок $G \Rightarrow$ $|O_i| = p^{k_i}$, где $k_i \geq 0$. Мн-во K есть объединение

непересекающихся орбит $O_1, \dots O_t$. Поэтому $p^l = |K| = p^{k_1} + \dots + p^{k_t}$. Т.к. 1 перестановочна с любым эл-том из G и лежит в K, то $|O_1| = 1$, если $1 \in O_1$. Но тогда среди остальных орбит должны быть и другие орбиты размера 1. Если x элемент из такой орбиты, то $x \in Z(G) \cap K$ и все доказано.

2 Поскольку $G/Z_k(G)$ снова p-группы $\forall k$, то нильпотентность G вытекает из 1 ∎

<u>Упр 4</u> Д-ть нильпотентность группы верхних унитреугольных м-ц над полем.