# 4. Ряды подгрупп и теорема Жордана–Гёльдера.

**Опр 1** Назовем **рядом** группы $G$ (конечную) цепочку вложенных друг в друга подгрупп:

(1) $1 = G_0 \le G_1 \le G_2 \le \ldots \le G_{n-1} \le G_n = G$.

Число $n$ наз-ся **длиной** ряда.

Если один ряд гр. $G$ содержит все члены другого, то первый наз-ся **уплотнением** второго.

Если $G_i \trianglelefteq G$ $\forall i = 0, \ldots n-1$, то ряд (1) наз-ся **нормальным**. Если $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ $\forall i = 0, \ldots n-1$, то ряд наз-ся **субнормальным**. Фактор-группы $G_{i+1}/G_i$, $i = 0 \ldots n-1$, называют **факторами** (суб)нормального ряда (1). Неуплотняемый субнорм. ряд = **композиционный**.

Зам. Иными словами, субнорм. ряд (1) — композиционный, если все его факторы — простые группы, т.е. не имеют нетрив. собств. нормальных подгрупп.

Примеры 1. Все факторы ряда

$$1 < \mathbb{Z}_p < \mathbb{Z}_{p^2} \ldots < \mathbb{Z}_{p^{n-1}} < \mathbb{Z}_{p^n} = G$$

циклические порядка $p$.

2. Группа верхнетреуг. м-ц $G = T_n(F)$ обладает нормальным рядом

$$1 = UT_n^n(F) \le \ldots \le UT_n^2(F) \le UT_n^1(F) \le T_n(F) = G$$

где

$$UT_n^m(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & * \\ & 1 & & & \ddots & * \\ & & \ddots & & & 0 \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}_m \in M_n(F) \right\}.$$

Упр 1 Докажите, что гр. $S_4$ обладает субнормальным рядом с циклическими факторами, но не имеет норм. ряда с этим свойством.

Напоминание: вторая и третья т. о гом-змах (см. т. 9.4.2 и 9.4.3 из [ВАМ]).

II: $K \leq G, H \trianglelefteq G \Rightarrow KH/H \simeq K/H \cap K$.

III $K \leq H \leq G$ и $K, H \trianglelefteq G \Rightarrow \dfrac{G/K}{H/K} \simeq G/H$.

Предл 1 (лемма Дедекинда) Пусть $A, B, C \leq G$ и $A \leq B$. Тогда $AC \cap B = A(C \cap B)$ и $CA \cap B = (C \cap B)A$.

Д-во: $x \in AC \cap B \Rightarrow x = ac \in B$, где $a \in A$, $c \in C \Rightarrow$ $c = a^{-1}x \in B \Rightarrow x \in A(C \cap B) \Rightarrow AC \cap B \subseteq A(B \cap C)$.
Обратно, $x \in A(C \cap B) \Rightarrow x = ac$, где $a \in A$, $c \in C \cap B$ $\Rightarrow x \in AC \cap B$. Второе рав-во док-ся аналогично ∎

Предл 2 Если $M \trianglelefteq K \leq G$ и $H \trianglelefteq G$, то $KH/MH \simeq K/M(H \cap K)$.

Д-во: В силу второй т-мы о гом-мах и включения $M \leq K$ имеем $KH/MH = K(MH)/MH \simeq K/MH \cap K \overset{\text{предл 1}}{=} K/M(H \cap K)$.

Т. 1 Пусть $G$ - группа с (суб)нормальным рядом (1)

(1) Если $H \leq G$, то пересекая $H$ с подгруппами из (1), получаем (суб)нормальный ряд в $H$:

(2) $1 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = H$, где $H_i = H \cap G_i$, $i = 0..n$

и фактор $H_{i+1}/H_i$ изоморфен подгруппе фактора $G_{i+1}/G_i$.

2 Если $H \trianglelefteq G$, то взяв образы членов ряда (1) при канон. гом-зме $G \to \overline{G} = G/H$, получим (суб)нормальный ряд в $\overline{G}$:

(3) $1 = \overline{G}_0 \leq \overline{G}_1 \leq \dots \leq \overline{G}_n = \overline{G}$, где $\overline{G}_i = G_iH/H$, $i = 0..n$,

причём фактор $\overline{G}_{i+1}/\overline{G}_i$ – гомоморфный образ ф-ра $G_{i+1}/G_i$.

<u>Д-во:</u> Соотношения $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$ и $\overline{G}_i \trianglelefteq \overline{G}_{i+1}$ для субнорм. рядов и $H_i \trianglelefteq H$, $\overline{G}_i \trianglelefteq \overline{G}$ для норм. рядов легко проверяются $\forall i = 0..n-1$. Используя т-мы о гом-змах и предл 2 имеем

$$H_{i+1}/H_i = H_{i+1}/H\cap G_i = H_{i+1}/H_{i+1}\cap G_i \underset{\text{I}}{\overset{\sim}{=}} H_{i+1}G_i/G_i \le G_{i+1}/G_i$$

$$\overline{G_{i+1}/G_i} \simeq G_{i+1}H/G_iH \underset{\text{предл 2}}{\overset{\sim}{=}} G_{i+1}/G_i(G_{i+1}\cap H) \underset{\text{III}}{\overset{\sim}{=}} G_{i+1}/G_i \Big/ G_i(G_{i+1}\cap H)/G_i$$

что и требовалось доказать ∎

Очевидно, что каждая конечная группа обладает некоторым композиционным рядом. Как связаны два таких ряда?

<u>Опр 2</u> Два (субнорм.) ряда наз-ся **изоморфными**, если они имеют одинаковое число факторов и между их факторами сущ-ет такое взаимно однозн. соотв-е, при котором соотв. факторы изоморфны.

Пример ряда $0 < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_4 < \mathbb{Z}_{12}$ и $0 < \mathbb{Z}_3 < \mathbb{Z}_6 < \mathbb{Z}_{12}$ изоморфны, т.к $\mathbb{Z}_2/0 \simeq \mathbb{Z}_6/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_3/0$.

Т. 2 (Шрайер) В каждой группе каждые два (суб)нормальных ряда обладают изоморфными (суб)нормальными уплотнениями.

Д-во: Пусть в $G$ заданы два (суб)норм. ряда

(4) $1 = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_m = G$

(5) $1 = B_0 \leq B_1 \leq \dots \leq B_n = G$

Уплотняем каждый промежуток $A_i \leq A_{i+1}$ первого ряда вставкой, приготовл. при помощи второго ряда и наоборот, промежутки $B_j \leq B_{j+1}$. Получим

$A_i = C_{i0} \leq C_{i1} \leq \ldots \leq C_{in} = A_{i+1}$, где $C_{ij} = (A_{i+1} \cap B_j) A_i$ и

$B_j = D_{j0} \leq D_{j1} \leq \ldots \leq D_{jm} = B_{j+1}$, где $D_{ji} = (B_{j+1} \cap A_i) B_j$.

Очевидно, что $C_{ij}$ и $D_{ji}$ нормальны, если $A_i$ и $B_j$ были нормальны. Кроме того, оба уплотнения имеют т.п факторов. Осталось проверить, что $\forall i, j$ вып-ся

$$C_{i,j+1}/C_{ij} \simeq D_{j,i+1}/D_{ji}.$$

Имеем

$$C_{i,j+1}/C_{ij} = (A_{i+1} \cap B_{j+1}) A_i / (A_{i+1} \cap B_j) A_i \overset{\text{предл. 2}}{\simeq}$$

$$\simeq (A_{i+1} \cap B_{j+1}) / (A_{i+1} \cap B_j) \underbrace{(A_i \cap B_{j+1})}_{= A_i \cap (A_{i+1} \cap B_{j+1})}.$$

Аналогично, $D_{j,i+1}/D_{ji} = (B_{j+1}\cap A_{i+1})B_j \big/ (B_{j+1}\cap A_i)B_j$

$\cong (B_{j+1}\cap A_{i+1}) \big/ (B_{j+1}\cap A_i)(B_j\cap A_{i+1}) \cong C_{i,j+1}/C_{ij}$ $\blacksquare$

Из т.2 сразу вытекает

<u>Т.3</u> (теорема Жордана-Гёльдера) любые два композиционных ряда группы изоморфны.

<u>Замечание</u> Напомним, что мы рассматриваем только ряды с конечным числом подгрупп. Ясно, что в каждой <u>конечной</u> группе композ. ряд всегда есть. С др. стороны, несложно перенести Д-во т.1,2,3 на случай счетного ряда вида:

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n \trianglelefteq \dots \qquad G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

<u>Упр 2</u> Сделайте это!

Теорему Ж.-Г. иногда сравнивают с осн. т-мой арифметики. <u>Д</u>ей-но, каждая конечная группа имеет композиционный ряд, члены которого — простые группы, причём различные композ. ряды изоморфны в смысле указ. выше определения. Но есть и важное различие.

Неизоморфные группы могут иметь изоморфные композиционные ряды.

<u>Пример.</u> $S_3 \trianglerighteq A_3 \trianglerighteq 1$ и $\mathbb{Z}_6 \geqslant \mathbb{Z}_3 \geqslant 0$.

Упр 3 Докажите, что у двух конечных разрешимых групп имеются изоморфные композиц. ряды $\Leftrightarrow$ они имеют одинаковый порядок.