5. Простые группы

Напомним, что группа G **проста**, если она не содержит нетрив. собств. норм. подгрупп.

<u>Т. 1</u> (теорема Галуа) При $n \neq 4$ знакопеременная группа A_n проста.

<u>Д-во:</u> При $n = 1, 2, 3$ группа A_n имеет порядки $1, 1$ и 3 соот-но $\Rightarrow G$ проста. При $n = 4$ $1 \neq K_4 \trianglelefteq A_4$.

Пусть $n \geq 5$ и $1 \neq K \trianglelefteq A_n$. Д-ем, что $K = A_n$.

В силу п. 2 Т. 3.3.2 достаточно док-ть, что K содержит хотя бы один цикл длины 3. С др. стороны,

K содержит нетрив. эл-т a. Можно считать, что один из трех вариантов имеет место:

1) $a=(1234\ldots)\ldots$ — в записи a есть цикл длины >3;

2) $a=(123)(45\ldots)\ldots$ — в записи a есть цикл длины 3 и еще что-то;

3) $a=(12)(34)\ldots$ — a — пр-е четного числа независ. транспозиций.

Если $a\in K$, то $[a,b]\in K$ $\forall b\in A_n$. Выберем в первых двух случаях эл-т b так:

1) $b=(123)\Rightarrow[a,b]=(124)$, что и требовалось.

2) $b=(124)\Rightarrow[a,b]=(12534)$ и 2) сводится к 1).

Наконец, $(12)(34)=(234)(123)\Rightarrow$ 3) сводится к 2).

Опр 1 Группа $G \leq Sym(\Omega)$ наз-ся k-транзитивной, если для любых попарно разл. $\alpha_1, \dots \alpha_k \in \Omega$ и попарно разл. $\beta_1, \dots \beta_k \in \Omega$ $\exists x \in G$: $\alpha_1^x = \beta_1, \dots \alpha_k^x = \beta_k$.

Предл. 1 Группа S_n n-кратно транзитивна, а группа A_n $(n-2)$-кратно транзитивна $\forall n \geq 3$.

Предл 2 Группа $PSL_n(F) \simeq SL_n(F) / Z(SL_n(F))$, $n \geq 2$, 2-транзитивна как проективная группа, действующая на точках соотв. $(n-1)$-мерного пр-ва.

Д-во: Достаточно показать, что $SL_n(F)$ действует 2-транзитивно на одномерных подпр-вах $V \simeq F^n$.

$\forall$ двух пар лин. незав в-ров v_1, v_2 и w_1, w_2 $\exists T \in GL_n(F)$: $v_i T = w_i$, $i=1,2$. Полагая $\tilde{T} = \frac{1}{|T|} T \in SL_n(F)$, имеем $v_i \tilde{T} = w_i'$, $i=1,2$, где $w_i' = \lambda w_i$. Образ x_c в $PSL_n(F)$ эл-та $\tilde{T} \in SL_n(F)$ — искомый элемент, переводящий пару точек в другую пару точек проективного пр-ва $\boxtimes$

<u>Теорема 2 (лемма Ивасавы)</u> 2-транзитивная группа $G \leq Sym(\Omega)$ проста, если

1) $G = G'$ (G совпадает со своим коммутантом),

2) стабилизатор G_α эл-та $\alpha \in \Omega$ содержит такую абелеву норм. подгр. A, что $G = \langle A^x \mid x \in G \rangle$.

<u>Д-во:</u> пусть $1 \neq K \trianglelefteq G$. Надо док-ть, что $K = G$.

а) Д-см, что K транзитивна.

Пусть $\beta \in \alpha^K$. Тогда $\forall x \in G$ $\beta^x = (\alpha^k)^x = \alpha^{xk'}$

$\Rightarrow$ если α, β лежат в одной орбите отн-но K, то и α^x, β^x лежат в одной орбите. Если $1 \neq K$ не транзитивна, то $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \Omega : \beta \in \alpha^K, \gamma \notin \alpha^K$. Но тогда пару (α, β) не удастся перевести в (α, γ) никаким $x \in G$, что противоречит 2-транзитивности группы G.

б) Докажем, что $G = G_\alpha K$.

По доказанному, K транзитивна, поэтому $\forall x \in G$ $\exists y \in K : \alpha^x = \alpha^y \Rightarrow xy^{-1} \in G_\alpha \Rightarrow$ $G = G_\alpha K$.

в) Д-ем, что $G = AK$. В силу того, что $G = \langle A^x \mid x \in G \rangle$, каждый $x \in G$ записывается в виде

$x = a_1^{x_1} \ldots a_s^{x_s}$, где $a_i \in A$, $x_i \in G$, $i = 1 \ldots s$. $(*)$

Поскольку $A \trianglelefteq G_2$, в силу б) можно считать, что в ф-ле $(*)$ $x_i \in K$. Так как $AK = KA$, то $x \in AK$.

г) Наконец, $G = K$. Действительно, в силу условия 1) т-мы, доказ. п. в) и коммут. соотношения из п. 4 предл. 3.3.2, имеем $G = [G, G] = [AK, AK] \leq K$ ∎

<u>Упр 1*</u> Д-те т. 1 (Гаруя) с исп. леммы Ивасавы.

Напомним, что $PSL_n(F) = SL_n(F)/Z(SL_n(F))$ — проективная специальная гр. м-ц над полем F.

Т. 3 (т-ма Жордана-Диксона) Для каждого поля F такого, что $|F|>3$ группа $PSL_n(F)$ проста.

Д-во: Мы д-ли (см. упр. 3.3.1), что $SL_2(2)$ и $SL_2(3)$ не просты. Пусть $|F|>3$, $G=PSL_n(F)$ и $\tilde{G}=SL_n(F)$. Мы воспользуемся леммой Ивасавы, рассматривая действие гр. $\tilde{G}$ на мн-ве Ω прямых в.п. $V=F^n$ (т.е. G на проектив-ном пр-ве PF^{n-1}). В силу предл. 2 пол-ся, что

группе G действует на Ω 2-транзитивно, как и требуется в условии т. 2 (леммы Ивасавы).

Далее в силу т. 3.3.2 $\widetilde{G} = [\widetilde{G}, \widetilde{G}] = \widetilde{[G, G]}$ $\Rightarrow G = [G, G]$, т.е. условие 1) из леммы Ивасавы выполняется. Осталось понять, что в стабилизаторе H точки из Ω, есть абелева норм. подгруппа A такая, что $G = \langle A^x \mid x \in G \rangle$.

Пусть ℓ - прямая с направл. вектором $e_n = (0, \dots 0, 1)$ из F^n. Тогда прообраз $\widetilde{H}$ стаб. H в $SL_n(F)$ состоит из м-ц вида
$$\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 \dots 0 & * \end{array}\right).$$

Рассм-м гом-зм $\varphi: \widetilde{H} \to GL_{n-1}(F) \times GL_1(F)$, т.е в группу м-у вида $\left(\begin{array}{c|c} * & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \ldots 0 & * \end{array}\right)$. Он имеет в качестве ядра подгруппу $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} E & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 \ldots 0 & 1 \end{array}\right)$. Имеем $\widetilde{A} = \operatorname{Ker}\varphi \trianglelefteq \widetilde{H}$

Кроме того, легко проверить, что $\widetilde{A}$ абелева.

В силу т. 3.3.3 п. 2 группа $SL_n(F)$ порождается всеми эл-ми, сопряженными с трансвекциями вида $t_{in}(\alpha)$, $i = 1 \ldots n-1$, $\alpha \in F \Rightarrow SL_n(F) =$
$= \langle \widetilde{A}^{\widetilde{x}} \mid \widetilde{x} \in SL_n(F) \rangle$. Образ A подгруппы $\widetilde{A}$ служит абел. норм. подгруппа в $G = PSL_n(F)$.

Аналогично, $G = \langle A^x \mid x \in G \rangle$ и все условия леммы Ивасавы выполнены $\Rightarrow$ G проста $\blacksquare$

В случае $F = \mathbb{R}$ еще один важный класс матричных групп составляют группы ортогональных м-ц (соотв. преобразования, сохраняющим длины векторов). Оказывается, что группа $SO_n = \{ A \in GO_n(\mathbb{R}) \mid |A| = 1 \}$ снова проста при $n \geqslant 3$, $n \neq 4$. Мы докажем это только в случае трехмерного пр-ва.

Т. 4 Группа SO_3 проста.

Δ-во: см. стр. 431 в [ВИН].

Заметим, что полученные нами результаты дают представление о том, как устроены основные классы конечных простых групп, как вытекает из монструозной теоремы о классификации простых групп. Её результат можно грубо сформ-ть так:

T.5 (CFSG) Конечная простая гр. G — одна из след:

1) группа простого порядка $\mathbb{Z}_p$
2) знакопеременная группа A_n, $n \geq 5$.
3) группа лиева типа над конечным полем $\mathbb{F}_q$ (пример: $PSL_n(\mathbb{F}_q)$)
4) 26 „маленьких" спорадических групп.
Самая большая из них монстр M: $|M| \approx 8 \cdot 10^{53}$.