4. Линейные представления и ассоц. алгебры

1. Определения и примеры лин. представлений

V — в. п. над полем F, $\mathcal{L}(V)$ — алгебра лин. пр-й на V.
Если $\dim V = n$, то выбор базиса в V задает из-зм $\mathcal{L}(V)$ и алгебры матриц $M_n(F)$.

Опр 1 Линейным представлением ${}^{\text{непусто}}$ мн-ва X на V/F наз-ся произв. отоб-е $\varphi: X \to \mathcal{L}(V)$ (*)

Пр-во V — пр-во представления, $\dim_F V$ — разм-сть представления, $x\varphi$, $x \in X$ — операторы представления. Если на X заданы операции (умножения — для групп, сложения и умножения — для колец, сложения, умножения и

умножению на скаляр — для алгебр), то φ должно быть согласовано с ними, т.е являться гомоморфизмом.

Иными словами, $\forall x, y \in X \ \forall \lambda \in F$ + $\varphi(1) = \varepsilon$ для групп!

$$(xy)\varphi = x\varphi\, y\varphi \quad \text{— группы}$$

$$(x+y)\varphi = x\varphi + y\varphi \quad \text{кольца} \tag{*2}$$

$$(\lambda x)\varphi = \lambda x\varphi \quad \text{алгебры}$$

<u>Опр 2</u> Пусть $\varphi: X \to \mathcal{L}(V)$ и $\psi: X \to \mathcal{L}(U)$ — представления одного и того же мн-ва X над одним и тем же полем F.

Представления φ и ψ эквивалентны (подобны, изоморфны), если $\exists$ изоморфизм $\Theta: V \to U$ т.ч.

$$v(x\varphi)\Theta = (v\Theta)x\psi \quad \forall v \in V, \ \forall x \in X. \tag{*3}$$

Θ — изоморфизм представлений.

Произв. (не обяз. биект.) лин. отоб-е $\Theta: V \to U$, удовл. (*3), приятно называть **морфизмом** пр-й φ и ψ.

Пример 1 Если $\Theta: V \to F^n$, $\sum \alpha_i e_i \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где e_i, $i = 1..n$, — базис V и $\varphi: X \to \mathcal{L}(V)$, то $\psi = \varphi\Theta: X \to M_n(F)$ — **матричное пр-е** мн-ва X, эквивалентное пр-ю φ.

Упр 1 Пусть $X = \{x\}$ — одноэлем. мн-во. Д-ть, что пр-я φ и ψ в $M_n(F)$ над алг. зам. полем F экв-ны $\Longleftrightarrow$ $x\varphi$ и $x\psi$ имеют одну и ту же жорд. форму (с точностью до перестановки клеток).

Зам. Если X — произв. мн-во (без операций) и $|X| \geq 2$, то разумного описания мн. пр-й X уже нет.

Пусть L – расширение поля F и $V_L = V \otimes_F L$ – в.п. над L.

Если $\varphi : X \to GL(V)$ – представление над V, то оно продолжается до пр-я $\varphi_L : X \to GL(V_L)$, причём если A – м-ца $x\varphi$ в базисе $\{e_i\}$, то A – м-ца и $x\varphi_L$ в базисе $\{e_i \otimes 1\}$ пр-ва V_L. ($\varphi_L = \varphi$ для краткости)

<u>Предл. 1</u> Если F – беск. поле и L – его расширение, то пр-я $\varphi : X \to \mathcal{L}(V)$ и $\psi : X \to \mathcal{L}(W)$, эквивалентные над L, эквивалентны и над F.

<u>Д-во:</u> См. предл 11.1.1 из [ВИН].

<u>ЗАМ.</u> бесконечность поля F гарантирует тождеств. совпадение мн-нов, которые равны как отображения.

Опр 3 Пусть $\varphi : X \to \mathcal{L}(V)$ – представление. Подпр-во U наз-ся **инвариантным** относительно φ, если $U(x\varphi) \subseteq U$ для любого $x \in X$. Если U инв. отн-но φ, то φ индуцирует от-я

$$\varphi_U : X \to \mathcal{L}(U), \quad u(x\varphi_U) = u(x\varphi) \ \forall u \in U, \forall x \in X$$

и

$$\varphi_{V/U} : X \to \mathcal{L}(V/U), \quad (v+U)(x\varphi_{V/U}) = v(x\varphi) + U, \quad \forall v \in V, \forall x \in X,$$

которые наз-ся **подпредставлением** и **фактор-предст-ем**.

Зам. Корректность вытекает из того, что тождеств. вложение $\theta : U \to V$ (соот-но канон. гом-зм $V \to V/U$) удовл. соотн. $(*3)$, т.е. яв-ся морфизмом представлений.

В матричной форме: если базис пр-ва V согласован с базисом инв. подпр-ва U, то $\forall x \in X$

$$[x\varphi] = \begin{pmatrix} [x\varphi_U] & * \\ 0 & [x\varphi_{V/U}] \end{pmatrix}.$$ Упр 2 Проверить!

Опр 4 (пусть $V \neq 0$) Лин. пр-е $\varphi : X \to \mathcal{L}(V)$ наз-ся приводимым, если найдется инв. отн-но φ подпр-во U : $0 \subset U \subset V$, и неприводимым в противном случае. Пр-е φ наз-ся разложимым, если найдутся собств. подпр-ва U, W пр-ва V, инв. отн. φ, для которых $V = U \oplus W$, и неразложимым, в противном случае. Наконец, φ вполне приводимо, если V есть прямая сумма инв. подпр-в V_i таких, что подпр-я φ_{V_i} неприводимы $\forall i$.

Зам. Неприв. $\Rightarrow$ неразл., но обратное неверно.

Пример 2. Пусть $G = \langle \mathbb{R}, + \rangle$ и $\varphi: G \to GL(E^2)$

$$t\varphi = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$ в ортонорм. базисе $\{e_1, e_2\}$.

Тогда φ неприводимо над $\mathbb{R}$, т.к., например, м-ца $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ не имеет одном. инв. подпр-в.
и даже вполне приводимо

Однако φ приводимо над $\mathbb{C}$ (т.е. в пр-ве $V_{\mathbb{C}}$), поскольку одномерные подпр-ва, натянутые на в-ры $e_1 + ie_2$ и $e_1 - ie_2$, инв-ны отн-но φ и в базисе из этих в-ров $t\varphi_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$, т.е. $\varphi_{\mathbb{C}}$ даже вполне приводимо.

Еще одно представление $\varphi: G \to GL(E^2)$ той же группы, где $t\varphi = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, приводимо, т.к. $U = \langle (0,1) \rangle$ инв-но отн-но φ, но неразложимо, т.к. других одномерных φ-инв. подпр-в нет!

<u>Упр 3</u> Проверить утв-я из примера 2.

<u>Пример 3</u> Пусть A - ассоц. (но не обязат. коммут) алгебра (с 1). Тогда ф-ла $a(x\rho) = ax$ $\forall a, x \in A$ задает лин. пр-е $\rho: A \to \mathcal{L}(A)$ называемое правым регулярным представлением.

Дей-но, несложно проверить св-ва (к2). В частности, $(xy)\rho = x\rho y\rho$ вытекает из ассоц. алгебры A.

Инвариантные подпр-ва этого представления — это в точности правые идеалы этой алгебры.

Мы уже говорили об этом, но на языке A-модулей.

Более общо, если на в.п. V/F задана структура правого A-модуля (см. файл АТ3), то отоб-е

$$\varphi : A \to \mathcal{L}(V), \quad v(x\varphi) = v * x \quad \forall v \in V,\ x \in A$$

— лин. представление на в.п. V (сравни опр-я).

В этом случае, A-подмодули $\Longleftrightarrow$ инв. подпр-ва и т.д.

<u>Пример 4</u> Пусть $\rho : G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$ — действие группы G на мн-ве $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ и $\{e_i,\ i = 1..n\}$ — базис пр-ва V.

Отоб-е $\varphi : G \to GL(V)$, заданное на эл-тах базиса так

$$(*4) \quad e_i(x\varphi) = e_{i(x\rho)},$$

— гом-зм $\Rightarrow$ лин. представление.

Представление φ из примера 4 наз-ся **подстановочным** (как впрочем и само ρ).
Это представление дает пример **мономиального** представления, т.е. представления у которого в некот. базисе все м-цы имеют ровно по одному ненулевому эл-ту в каждой строке и каждом столбце.

<u>Упр 4</u> а) Д-те, что при $n = |\Omega| \geq 2$ пр-е φ из примера 4 приводимо.
б) Если $\operatorname{char} F = 0$ и $G = \operatorname{Sym}(\Omega)$, ρ - тожд. д-е, то $V_0 = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0\}$ и $V_1 = \langle \sum_{i=1}^{n} e_i \mid i = 1..n \rangle$
- неприводимые φ-инв. подпр-ва и $V = V_0 \oplus V_1$.

Предл 2 Пусть $\varphi: X \to \mathcal{L}(V)$ и $\psi: X \to \mathcal{L}(U)$ — неприв. лин. пр-я мн-ва X над полем F. Если $\Theta \in Hom_F(V, U)$, удовл. св-ву $v(x\varphi)\Theta = (v\Theta)(x\psi)$ $\forall v \in V$ $\forall x \in X$, то либо $\Theta = 0$, либо Θ — изоморфизм представлений.

Д-во: $Ker\,\Theta \leq V$ инв. отн-но φ, а $Im\,\Theta \leq U$ инв. отн-но ψ. Из неприводимости φ и ψ $\Rightarrow$ либо $Ker\,\Theta = V$ и $Im\,\Theta = 0$, т.е. $\Theta = 0$, либо $Ker\,\Theta = 0$ и $Im\,\Theta = U$, т.е. Θ — из-зм ∎

Теорема 1 (лемма Шура) Если V — в.п. над алг. зам. полем F, $\varphi: X \to \mathcal{L}(V)$ — неприв. пр-е, $\Theta \in \mathcal{L}(V)$: $v(x\varphi)\Theta = (v\Theta)(x\varphi)$ $\forall v \in V$ $\forall x \in X$, то $\Theta = \lambda E$ для некот $\lambda \in F$.

Иными словами, всякий эндоморфизм (морфизм в себя) неприводимого пр-я над алг. зам. полем скалярен.

Д-во: Поскольку φ и Θ перестановочны, то φ перестановочно и с $\Theta - \lambda\mathcal{E}$ $\forall \lambda \in F$. Поскольку F алг. замкнуто, то $\exists \lambda \in F$: $\ker(\Theta - \lambda\mathcal{E}) \neq 0$. В силу предл. 2 $\Rightarrow \Theta - \lambda\mathcal{E} = 0$ ∎

Следствие 1 Все морфизмы двух неприводимых представлений одного мн-ва (над одним полем) пропорциональны между собой.

Следствие 2 Всякое неприводимое представление абелевой группы над алг. замкн. полем одномерно.

Д-во: пусть $\varphi: G \to GL(V)$ — неприв. пред. абелевой

группы G. Если $x, y \in G$, то $xy = yx \Rightarrow (x\varphi)(y\varphi) =$
$= (xy)\varphi = (yx)\varphi = (y\varphi)(x\varphi) \Rightarrow x\varphi$ — эндоморфизм
пр-я φ для любого $x \in G$. По лемме Шура $\Rightarrow$
$x\varphi = \lambda(x)\mathcal{E}$ — скалярный оператор. Но тогда любое
подпр-во U $(x\varphi)$-инв. $\forall x \in G$, т.е инв. отн-но φ.
В силу неприв. φ это возможно только, если $\dim V = 1$ ∎