2. Полная приводимость линейных представлений

__Опр__ **Суммой** линейных представлений $\varphi_i : X \to \mathcal{L}(V_i)$, $i = 1, \dots m$, наз-ся лин. представление

$$\varphi = \bigoplus_{i=1}^{m} \varphi_i : X \to \mathcal{L}\left(\bigoplus_{i=1}^{m} V_i\right),$$ опред. правилом

$$(v_1, \dots v_m)(x\varphi) = (v_1(x\varphi_1), \dots v_m(x\varphi_m)) \quad \forall x \in X \ \forall v_i \in V_i,$$

__Предл 1__ Если $\varphi : X \to \mathcal{L}(V)$ — лин. пр-е и $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$, где V_i — инв. отн-но φ для любого $i = 1 \dots m$, то

$$\varphi = \bigoplus_{i=1}^{m} \varphi_i, \text{ где } \varphi_i = \varphi_{V_i}.$$

__Д-во:__ Из опр-я.

В матричной записи (в объединении базисов V_i):

$$[x\varphi] = \begin{pmatrix} [x\varphi_1] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [x\varphi_m] \end{pmatrix} \quad \forall x \in X.$$

<u>Т. 1</u> (экв. опр-я вполне приводимости) Следующие экв-ны:

1) $\varphi : X \to \mathcal{L}(V)$ вполне приводимо (т.е. $V = \bigoplus V_i$, V_i — φ-инв. и φ_{V_i} неприв. $\forall i = 1..m$)

2) φ — сумма неприводимых представлений

3) Для любого инв. отн-но φ подпр-ва U пр-ва V найдется инв. отн-но φ подпр-во W: $V = U \oplus W$.

<u>Зам.</u> V — к.м. в.п.

Д-во: Очевидно, что $1 \Leftrightarrow 2$ (см. опр-я и предл. 1)

$3 \Rightarrow 1$) Берем любое мин. инв. подпр-во $V_1 < V$ (если $U = V$, то все доказано). В силу 3 $\exists$ инв. W: $V = V_1 \oplus W$, берем в W – мин. инв. подпр-во V_2 и т.д.

$1 \Rightarrow 3$) Пусть $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$ и $\varphi_i = \varphi_{V_i}$ – неприв.

Положим $V_I = \sum_{i \in I} V_i \quad \forall I \subseteq \{1, .. m\}$.

Пусть U – произв. φ-инв. подпр-во. Выберем $I \subseteq \{1 .. n\}$ максим. (может быть пустое) такое, что $U \cap V_I = 0$. Тогда $\forall j \notin I$: $U \cap V_{I \cup \{j\}} \neq 0$ $\Rightarrow (U \oplus V_I) \cap V_j \neq 0$. Т.к. V_j – мин. φ-инв. подпр-во, то $V_j \subseteq U \oplus V_I \Rightarrow V = U \oplus V_I$ ∎

Зам. Из доказ-ва $\Rightarrow$ W можно взять $= V_I$ для $I \subseteq \{1 .. n\}$.

Следствие Если $\varphi: X \to \mathcal{L}(V)$ вполне приводимо и φ – сумма неприводимых φ_i, $i = 1..m$, то каждое подпр-е и фактопредставление пр-я φ изоморфны сумме некоторых φ_i.

Д-во: См. замечание после док-ва т. 1.

Пример Мы знаем (см. АТ 17), что $|X| = 1 \Rightarrow$ неприв. пр-е X над алг. зам. полем одномерно $\Rightarrow$ каждое вполне прив. пр-е диагонализируемо. (Тоже касается пр-й абелевой группы).

Зафикс. для вполне прив. пр-я $\varphi: X \to \mathcal{L}(V)$ разложение $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$ $\qquad (*)$ в прямую сумму мин. инв. подпр-в.

Т. 2 (Машке) Пусть G – кон. группа, V – в.п. над полем F. Если $\operatorname{char} F \nmid |G|$, то любое пр. е $\varphi: G \to GL(V)$ вполне приводимо.

Д-во: См. также § 11.2 из [ВИН] и Т. 3.3.1 из [Бог]

Лемма 1 (о неподвижной точке) Если S - аффин. пр-во над полем F, $G \leq GA(S)$ – конечная группа его пр-й, причем $\operatorname{char} F \nmid |G|$, то $\exists s \in S$: $sg = s \ \forall g \in G$.

Д-во: Пусть $o \in S$. Положим $s = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} og$ – центр тяжести орбиты точки o. В силу того, что $\frac{1}{|G|} \in F$ и $\sum_{g \in G} \frac{1}{|G|} = 1$, s – барицентрическая л.к.

точек из $S \underset{\text{§7.1 из [ВЧН]}}{\Longrightarrow} s \in S$. Кроме того, $\forall x \in G$ $sx = \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma g\right) x = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(gx) = = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \sigma g' = s$, где $g' = gx$ ∎

<u>Лемма 2</u> Если V - в.п. над F, $G \leq GL(V)$ — кон. группа и $\operatorname{char} F \nmid |G|$, то $\forall$ G-инв. подпр-ва U пр-ва V найдется G-инв. подпр-во W: $V = U \oplus W$.

<u>Д-во:</u> $p \in \mathcal{L}(V)$ — проектор на $U \Leftrightarrow up = u$ $\forall u \in U$ и $vp \in U$ $\forall v \in V$. Заметим, что эти условия задаются лин. ур-ями в пр-ве $\mathcal{L}(V) \Rightarrow P$ - мн-во всех проекторов на U — аффин. пр-во.

Поскольку $\forall g \in G$ $\forall p \in \mathcal{P}$ имеет место соотн-я:
$u p^g = u g^{-1} p g = u g^{-1} g = u$ $\forall u \in U$ и
$v p^g = v g^{-1} p g \in U$ $\forall v \in V$,
группа G действует на $\mathcal{P}$ сопряжениями.
Подпр-во W: $V = U \oplus W$ будет G-инв $\Leftrightarrow$
$\underline{P} = P_{U \| W}$ – проектор на U параллельно W перестановочен со всеми $g \in G$, т.е. явл-ся неподв. точкой отн-но действия группы G. Существование такого p обесп. лемма 1 $\Rightarrow$ искомое W тоже сущ-ет ∎

<u>Д-во теоремы:</u> Достаточно восп. т.1 и применить лемму 2 к образу $G\varphi$ группы G в $GL(V)$ ∎

Опр 2 Изотипной компонентой (компонентой, компонентой Веддербёрна) пр-я φ, отвечающей неприв. пр-но ψ мн-ва, наз-ся сумма $V_{(\psi)}$ тех слагаемых V_i разложения (*), для которых $\varphi_{V_i} \simeq \psi$, а также ограничение $\varphi_{(\psi)}$ на эту сумму.

Зам. Если U - мин. φ-инв. подпр-во в V: $\varphi_U \simeq \psi$, то $U \subseteq V_{(\psi)}$. Это показывает, что изотипные компоненты не зависят от выбора разложения (*).

Из опр 2 $\Rightarrow$ V есть прямая сумма изотипных компонент, отвечающих неэквивалентным неприводимым представлениям мн-ва X.

В нашем примере ($|X|=1$, F алг. з., φ — вполне прив.) изотипные компоненты — подпр-ва собств. в-ров оператора $x\varphi$.

Опр 3. Пр-е $\varphi: X \to \mathcal{L}(U)$ изотипно (точнее, ψ-изотипно), если $\varphi = \varphi(\psi)$.

Изотипные представления описываются сл. образом.

Пусть $\psi: X \to \mathcal{L}(U)$ — неприводим. пр-е и Z — произв. (к.м.) в.п. Определим пр-е

(*2) $\varphi: X \to \mathcal{L}(U \otimes Z)$, $(u \otimes z)(x\varphi) = u(x\psi) \otimes z$.

Если $z_1, \dots, z_m$ — базис Z, то $U \otimes Z = (U \otimes z_1) \oplus \dots \oplus (U \otimes z_m)$ (*3)

разложение в прямую сумму инв. подпр-в и

$\varphi_{U \otimes z_i} \cong \psi \quad \forall i = 1..m$.

Предл 2 Если поле F алг. зам., то каждое ненулевое инв. подпр-во пр-ва $U \otimes Z$ имеет вид $U \otimes Z_0$, где $Z_0 \leq Z$.

Д-во: Пусть W — инв подпр-во в $U \otimes Z$. Не теряя общности, можно считать что W — мин. инв. подпр-во.

В силу $(*3)$ $\forall w \in W$ имеем

$$w = w\theta_1 \otimes z_1 + \ldots + w\theta_m \otimes z_m,$$ где θ_i, $i = 1..m$, — морфизмы пр-я φ_W в пр-е ψ.

В силу следствия 1 из т. 13.1.1 (лемма Шура из прошлой лекции) все θ_i пропорциональны, т.е. $\theta_i = \lambda_i \theta$, где θ — фикс. изоморфизм пр-я φ_W в ψ.

Таким образом, $w = w\theta \otimes (\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_m z_m) \Rightarrow$

$W = U \otimes \langle \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_m z_m \rangle$ ∎

Упр! Д-ть, что если F алг. замк., то каждый эндоморфизм пр-я (*2) имеет вид $u \otimes z \mapsto u \otimes \mathcal{A}z$, где $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(Z)$.

Т. 2 (Бернсайд) Пусть $\varphi: X \to \mathcal{L}(V)$ неприв. представл. мн-ва X над алг. зам. полем. Тогда подалгебра $A = \langle X\varphi \rangle_{\text{алг.}}$ совпадает с алгеброй $\mathcal{L}(V)$, исключая трив. случай, когда $\dim V = 1$ и $\varphi = 0$.

Зам. Подалгебра, а не подпр-во NB!

Д-во: Отождествим $\mathcal{L}(V)$ с $V \otimes V^*$, сопоставляя разложимому эл-ту $u \otimes \alpha \in V \otimes V^*$ лин. оператор $u \otimes \alpha: v \mapsto \alpha(v)u$. При этом $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ имеем

$(u\otimes\alpha)\mathcal{A} = u\mathcal{A}\otimes\alpha$ и $\mathcal{A}(u\otimes\alpha) = u\otimes\alpha\mathcal{A}^*$ (*4)

где $\mathcal{A}^*$ — сопр. оператор, т.е. $(\alpha\mathcal{A}^*)(v) = \alpha(v\mathcal{A})$.

Напомним, что имеется канон. соот-е между подпр-вами $U \le V$ и $U^* = \{\alpha\in V^* \mid \alpha(u)=0 \ \forall u\in U\} \le V^*$ (см. окончание §5.2 в [ВИН], в частности, следствие т. 5.2.3). Поэтому пр-е $\varphi^*: X\to \mathcal{L}(V^*)$ пор-ое $\alpha(x\varphi^*) = \alpha(x\varphi)^*$ $\forall x\in X$ $\forall\alpha\in V^*$, неприводимо.

Определим пр-я τ_ℓ и τ_r из X в $\mathcal{L}(V)$ ф-ми:

$\mathcal{A}(x\tau_\ell) = (x\varphi)\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}(x\tau_r) = \mathcal{A}(x\varphi)$ (*5)

В виду (*4) τ_ℓ и τ_r изоморфны.

Легко проверить, что $A = \langle x\varphi \mid x \in X \rangle_{alg}$

— подпр-во в $\mathcal{L}(V)$, инвариант. отн-но ε_ℓ и ε_r.

<u>Упр 2</u> Проверьте последнее утв-е!

В силу предл. 2 $A = V \otimes (V^*)_0 = V_0 \otimes V^*$,

где V_0 и $(V^*)_0$ — подпр. ва в V и V^* соот-но.

Если $A \neq 0$, то $\Rightarrow A = V \otimes V^* = \mathcal{L}(V)$.

Если $A = 0$, то $\dim V = 1$ и $\varphi = 0$ $\blacksquare$

<u>Опр 4</u> Тензорное произведение пр-й $\varphi : G \to GL(V)$

и $\psi : H \to GL(W)$ групп G и H — это пр-е

$\varphi \otimes \psi : G \times H \to GL(V \otimes W)$ по ф-ле $(g,h)(\varphi \otimes \psi) = g\varphi \otimes h\psi$.

Предл 3 Если F алг. зам., то тензорное пр-е неприв. пр-й групп G и H тоже неприводимо.

Упр 3. Д-ть предл. 3

Опр 5 Вполне приводимое пр-е $\varphi = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \varphi_i$ имеет простой спектр, если неприводимые представления φ_i, $i=1..m$, попарно неэквивалентны.

Иными словами, все изотипные компоненты φ неприводимы (или все φ_i изотипные пр-я).

Пример $|X|=1$ и F алг. зам. $\Rightarrow$ ($\varphi: X \to M_n(F)$ имеет простой спектр $\Leftrightarrow$ χ_φ имеет простой спектр ($\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$)).

Предлож. Пусть $\varphi: X \to \mathcal{L}(V)$ — вполне привод. представление с простым спектром и $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ — соотв. разложение (*) в сумму мин. φ-инв. подпр-в. Тогда

1) U — φ-инв. подпр-в $\Rightarrow U = \bigoplus_{i \in I} V_i \quad I \subseteq \{1..m\}$

2) если F алг. зам., то всякий эндоморфизм θ пр-я φ имеет вид $x\theta = \lambda_i x$ при $x \in V_i$ $(\lambda_1 .. \lambda_m \in F)$.

Д-во: 1) $U = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$, U_i — мин φ-инв. подпр-во.

Т.к. φ имеет простой спектр $\Rightarrow \forall i = 1..k \ \exists j = 1..m$: $U_i = V_j$ и $U_i \neq U_j$ при $i \neq j$.

2) Каждое слагаемое разложения (*) — изотипная компонента $\Rightarrow$ инв. отн-но $\theta \xRightarrow{\text{л. Шура}} x\theta = \lambda_i x \quad x \in V_i$ ▪

Следствие Для вполне приводимого пр-я с простым спектром разложение (*) единственно.