

3. Конечноразмерные ассоциативные алгебры

Пусть A — к.м. ассоциативная (не обязательно коммутативная!) алгебра над полем F . Умножения на поле F будут наследоваться условиями (что $F \neq \dim A$, $\text{char } F = 0$, F — алг. замкн.). В любом случае, все сов-ся верно, если $F = \mathbb{C}$.

Напомним, что алгебра A **нильпотентна**, если любой $a \in A$ **нильпотентен**, т.е. $\exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0$.

Пример $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(F) \right\}$ алгебра (верхних) nilpotentных и-у nilpotentных. Более того, произведение любого и любого этих алгебр $= 0$.

Т.1 Для любого конечнопорожденного алгебры $A \exists n \in \mathbb{N}$:
произведение n модулей и n -го равно нулю.

Зам. Конечномерность существенна!

Обозн. $B, C \subseteq A \Rightarrow BC = \{bc \mid b \in B, c \in C\}$ и
 $B^n = \{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n \mid b_i \in B\}$. Мы знаем, что $A^n = 0$.

Лемма: Пусть $B \subseteq A$ — макс.

подгруппа в A , такая что $B^n = 0$. Выберем
 $a \in A \setminus B$. Т.к. $\exists k \geq 0$: $aB^k \not\subseteq B$, но $aB^{k+1} \subseteq B$, то
можно взять $a' \in aB^k \setminus B$: $a'B \subseteq B$.

Заменим a на a' . Т.к. A конечно, то $\exists m \in \mathbb{N}$: $a^m = 0$.
Положим $C = B \oplus \langle a \rangle$. По выбору a имеем $C^{m+1} = 0$,
что противоречит выбору B . \square

Предл 1 1) Каждый идеал в комм. алгебре фактор-
алгебры идеал. алгебры коммутативна.
2) Если $I \subseteq A$, то из идеалов I и $A/I \Rightarrow A$ идеал.

Упр 1 $\Delta \rightarrow$ предл. 1

В отличие от комм случая все идеалы в не-
ассоциативной алгебре A не обязаны образовывать идеал
(и даже подалгебры!). Упр 2 Приведите пример.

Зам. Идеал = двухсторонний идеал.

Предл 2 Если I, J — идеалы алг. A , то
 $I+J$ — идеал A . В частности, сумма любых
идеалов идеал алгебры A .

Лемма 1: $J \subseteq I+J$ и $I+J/J \cong I/I \cap J$ по те-
ореме о прообразе. В силу предп. 1 $\Rightarrow I+J$ идеал, \square

Опр 1 Идеальным идеалом идеала алгебры A
наз-ся ед. **радикалом** и обозн. $\text{rad}(A)$.

Опр 2 Алгебра A наз-ся **полупростой**, если $\text{rad}(A)=0$.

Зам. $A/\text{rad}(A)$ либо нелева, либо полупроста.

Пример 2 Если ед-н $h \in F[x]$, то $A = F[x]/(h)$
полупроста $\Leftrightarrow h$ не имеет кратных корней.

Мож описать простые полупростые алгебры
(счт $\text{char } F = 0$) с помощью их представлений!

Пусть $\rho: A \rightarrow \mathcal{L}(A)$ — (правое) регулярное представление алгебры A (см. пример 3 из ЛТ 17), т.е. $\rho(x\rho) = \rho x$ $\forall a, x \in A$. Определим на A сим. билин. ф-цию, которую будем называть **скатертиным ср-ем** (хотя она может быть вырожденной!) правилом: $(a, b) = \text{tr}((ab)\rho) = \text{tr}(\rho a)(b\rho)$ (X1)

Предл 3 Если $a, b, c \in A$, то $(ab, c) = (a, bc)$

Упр 3 Проверьте, что опред. нами ф-ция $(,)$ — сим. билин. и г-то предл. 3.

Если $M \subseteq A$, то $M^\perp = \{u \in A \mid (m, u) = 0\}$ называется **ортogonalным дополнением** к M .

Препр 4 Если $I \trianglelefteq A$, то $I^\perp \trianglelefteq A$.

Δ -во: Пусть $x \in I^\perp$, $a \in A$, $y \in I$. Тогда $(xa, y) = (x, ay) = 0$ и $(ax, y) = (y, ax) = (ya, x) = 0$ \square

Препр 5 Если $\text{char } F = 0$, то каждый $a \in A$, ортогональный всем своим сечениям, нильпотентен.

Δ -во: Пусть $\forall n \in \mathbb{N} (a, a^n) = \text{tr}(a^{n+1}p) = 0$,

Пусть K -расщ. поле F : хар. n -н $f(t)$ оператора a разл. на лев. и прав. факторы: $f(t) = t^{k_0} \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{k_i}$ ($\lambda_i \neq 0$ и разл.)

Тогда $0 = \text{tr}(a^{n+1}p) = \text{tr}(ap)^{n+1} = \sum_{i=1}^s k_i \lambda_i^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$

Пусть n пробегает значения $1, \dots, s$. В s -м равенстве как следствие однород. лев. чл-ва отн-но k_1, \dots, k_s . Её вып-ка

(т.е. орг-м имеет свойство) $\lambda_1^2 \dots \lambda_s^2$
 совпадает с орг-м Вандермонда \Rightarrow значение 0
 $\Rightarrow k_1 = \dots = k_s = 0$ в поле K (исп., что $\text{char } K = 0$)
 $\Rightarrow S = 0 \Rightarrow$ оператор a nilpotent $\Rightarrow \exists m: (a)^m = 0$
 $\Rightarrow a^{m+1} = a(a)^m = 0$ \square

Т. 2 (критерий полноты) 1) Если скл. орг-м ($\neq 1$)
 невырожден, то A полнота.
 2) Если A полнота и $\text{char } F = 0$, то скл. орг-м ($\neq 1$)
 невырожден.

Д-во: 1) Если I -идеал. идеал в A , то $\forall x \in I \forall a \in A$
 $ax \in I$, т.е. идеал. $\Rightarrow (a, x) = \text{tr}(ax)p = 0 \Rightarrow$
 $I \subseteq A^\perp = 0$ в случ невырожден. скл. орг-м $\Rightarrow A$ полнота.

2) Если ском. ур-е выполнено, то $0 \neq A^\perp$. В силу
 упр. 4 $A^\perp \subseteq A$, hence, $\forall x \in A^\perp (x, x^n) = 0$.
 Т.к. $\text{char } F = 0$, то упр. 5 $\Rightarrow A^\perp$ инв. в отношении.

Зам. В частности, при $\text{char } F = 0$ мы показали,
 что $\text{rad}(A) = A^\perp$, что ссылаемся на ур-е.

Пример 3 Как уже говорилось в §-ве 1-м Бернсайда
 (см. АТ 18), регулярное ур-е в алгебре $L(V)$
 изотипно. Более точно, $\rho \simeq \underbrace{\tau \oplus \dots \oplus \tau}_{n \text{ раз}} = n\tau$, где
 $n = \dim V$ и $\tau: L(V) \rightarrow L(V)$ — **тавтологическое представление** —
линейное представление $L(V)$, т.е. тожд. об-е из $L(V)$ в $L(V)$.

Сл-но, ском. ур-е $(x, y) \in L(V)$ имеет вид

$$(x, y) = n \text{ tr}(AB) \quad \forall A, B \in L(V).$$

Если E_{ij} — кр. е. в M_n — E_{ij} (в функ. смысле), то
 то $E_{ij} E_{kl} = \begin{cases} 1 & i=l, j=k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \Rightarrow L(V)^\perp = 0$
 Если $\text{char } F \neq n$

Предп 5 $\Rightarrow L(V)$ полупроста (если $\text{char } F = 0$)..

На самом деле $L(V)$ даже прост, причем не завис. от $\text{char } F$.

Опр 3 Алгебра A наз-ся простой, если $A \neq 0$ и A не имеет ненуль. соотв. идеалов.

Пример 4 Если поле L -расщ. над F , то алгебра $L(\text{ad } F)$ проста.

Упр 4 Если L -простая комм. алгебра над полем F , то либо L -расщ. над F , либо $\dim L = 1$ и элемент не кр. — идеал.

Преп. 6 Если A проста, то A полупроста, за искл.
случая, когда A — односторонний идеал с н.л. умн-ем.
Д-во. Т.к. пр-е двух идеалов — снова идеал, то $A^2 \subseteq A$.

Если A — идеал, то $A^2 \neq A$ (иначе $A^n = A \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$)

\Rightarrow за искл. случая $\dim A = 1$ и $A^2 = 0$ простая
алгебра не может быть идеалом, $\Rightarrow A$ полупроста \square

Следствие Алгебра $L(V)$ проста и, сл-но, полупроста.

Д-во: Достаточно показать, что в $M_n(F)$ нет нетрив.
идеалов. Пусть $X = (x_{ij}) \neq 0 \in I \subseteq M_n(F)$. Пусть, что
хот $\neq 0$. Тогда $\forall i, j \in \{1..n\}$ имеем
 $E_{ik} X E_{lj} = x_{kl} E_{ij} \in I \Rightarrow E_{ij} \in I \Rightarrow I = M_n(F) \square$

7.3 Каждая коммутативная ассоц. алгебра A над полем F характер 0 разлагается в прямую сумму (неприв.) простых алгебр:

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_s, \quad (*)4$$

причем любой $I \triangleleft A$ есть сумма некоторых из A_i из $(*)4$

Зам. Эта теорема Верма и без условия char $F = 0$!

Д-во: Если A проста, то все доказано ($s = 1$).

Пусть A не проста и A_1 — её мин. идеал. Если $A_1 \leq A_1^\perp$, то в силу предл. 5 (здесь миним. char $F = 0$) A_1 коммутирует, противоречие \Rightarrow центр. умножение на A невырожден \Rightarrow

$$A = A_1 \oplus A_1^\perp. \quad (*)5$$

Разложение $(*)5$ означает, что всякий идеал в A_1 и A_1^\perp — идеал во всей A . Действ., если $x \in I \triangleleft A_1$ и

$a = a_1 + a_1',$ где $a_1 \in A_1, a_1' \in A_1^\perp$, то $(\chi a_1', a_1') = 0$
 $\forall a_1' \in A_1^\perp \Rightarrow \chi a_1' = 0 \forall a_1' \in A_1^\perp$. Поэтому $\chi a = \chi a_1' \in I$.
 (Аналогично для идеала из A_1^\perp). Таким образом,
 A_1 — негив. простая алгебра, а A_1^\perp — коммутативная,
 центральное простое сн, сн A . Утедываясь по лемме сн
 доказываем существование разложения (*4),

Пусть $I \trianglelefteq A$. Пусть $\pi_k: A \rightarrow A_k$ — проекция (*4)
 и $I_k = \pi_k(I)$. Очевидно, что $I_k \trianglelefteq A_k$. Так A_k проста,
 то если $I_k \neq 0$, то $I_k^2 = A_k \Rightarrow A_k = A_k^2 = A_k I_k = A_k I \subseteq I$
 Тогда $I = \bigoplus_{k \in J} A_k$, где $k \in J \Leftrightarrow A_k \subseteq I$.
Упр 5 а) Если к.м. коммут. алгебра A проста, то

А если обратная сумма кон. рцел. членов F (см. зуп. 4);

б) если при этом член F анн-зам., то $A \cong \bigoplus_{i=1}^n F$

в) г-те н.б. с помощью т. Гильберта о нулях.

Пример 5 Пусть $h \in F[x]$ и $h = p_1 \cdot \dots \cdot p_s$ — разложение h в непр-е непр-за. многоч., причем $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$.

В силу т. 4 АН-52 (см. также т. 3.2.5 из [ВУН]) имеем

$$A = F[x]/(h) \cong F[x]/(p_1) \oplus \dots \oplus F[x]/(p_s)$$

— это и есть разложение из п. а) в зуп. 5

если $F = \mathbb{C}$, то $A \cong s \mathbb{C}$ (см. также б) зуп. 5)

если же $F = \mathbb{R}$, то $A \cong t \mathbb{R} \oplus \frac{s-t}{2} \mathbb{C}$, где t — число вещ. корней многоч. $h \in F[x]$.

Т. 4 Каноническое неприв. продолжение ассоц. алгебры A
над алг. зам. полем F изоморфно алгебре $L(V)$,
где V — в.п. над полем F . Каноническое неприв.
пр.-е алгебры A эквивалентно таблическому
представлению алгебры $L(V)$.

Зам Прив. пр.-е $\varphi \Leftrightarrow \dim V = 1$ и $V\varphi = 0$.

Л-во: Пусть $\rho: A \rightarrow L(A)$ — (правое) регул. пр.-е для A ,
 V — лев. идеал, отн-ко ρ неприв.-во (т.е. правый идеал в A),
и $\varphi: A \rightarrow L(V)$ — отображение ρ на V , т.е. $V(a\varphi) = V(a\rho)$
 $\forall v \in V$ и $\forall a \in A$. Пр.-е φ уже неприводимо и по т.
Вертецайде (см. №92) имеем $A \cong A\varphi = L(V)$, что и треб.

$\text{мндо } \dim V = 1 \text{ и } A\varphi = 0$. В последнем случае,
 $0 \neq V \subseteq A_0 = \{x \in A : xa = 0 \forall a \in A\}$. Т.к. $\forall y \in A$
 $A_0 y \subseteq A$ и $yA_0 \subseteq A$, то $A_0 \trianglelefteq A$. В силу простоты A
 получено что $A_0 = A$, но это противоречит. не нуль. алг. A .

Итак, $A = I(V)$ для нескот. в.и. V . Если $\tilde{\tau}$ — тавто-
 логическое ур-е алгебры A в ур-е V , то перв. ур-е
 $\rho \simeq \pi \tilde{\tau}$ (см. пример 3). Тогда $\psi: A \rightarrow I(U)$ —
 произв. не нуль. ур-е алг. A . Выберем $u_0 \in U$ и
 р.и. от-е $\theta: A \rightarrow U$ по правилу $a \mapsto u_0(a\psi)$. Тогда как
 $(x(ar))\theta = (xa)\theta = u_0(xa)\psi = u_0(x\psi)(a\psi) = (x\theta)(a\psi)$,
 то θ — морфизм ур-я ρ в ур-е ψ . Если ψ — не нуль,
 то $\text{Im } \psi = U \Rightarrow \psi$ экв. некоторому факторпредставле-

мнго нр-н р. Т.к φ невырожден, $\varphi \simeq \tau$ (см. следствие из т. 1 из АН-92) \square

Т. 5 (структурная) Всякая ~~полупростая~~ ассоц.

алгебра A над алг. зам. полем F изоморфна алгебре

$$(*6) \quad M_{n_1}(F) \oplus \dots \oplus M_{n_s}(F), \text{ где}$$

$M_{n_i}(F)$ — полная матричная алгебра р-зм-сти n_i . В частности,

$$\dim A = n = n_1^2 + \dots + n_s^2.$$

Д-во: Выводится из т. 3 и т. 4 \square

Зам. 4 $Z(A) = \{z \in A : za = az \ \forall a \in A\}$ — центр алгебры A .

Следствие Если A как в (*6), то $\dim Z(A) = s$.

Д-во: $Z(M_n(F))$ — гомотетичные нр-во скалярных м-ц.

Пусть дан $i=1 \dots s$ $\varphi_i: A \rightarrow M_{n_i}(F)$ — неприводимое
 ир-е алг. A , заданное проекцией A на i -ю компо-
 ненту разложения (*6).

Следствие 2 Каждое ^{неприв.} неприводимое ир-е алгебры A
 из 7.8 эквивалентно одному из представлений $\varphi_1, \dots, \varphi_s$.

Д-во: Если $\varphi: A \rightarrow \mathcal{L}(V)$ — неприв. ир-е, то

$\mathcal{L}(V) = A\varphi$ — проектная алгебра, $\text{Ker } \varphi \cong \bigoplus_{i \neq i'} M_{n_i}(F)$
 и $\text{Im } \varphi \cong M_{n_{i'}}(F)$. По 7.4. φ эквивалентно $\varphi_{i'}$ \square