2. Кольца главных идеалов

Вспомнить: а) кольцо целостности, евкл. делимость в таких кольцах, простой эл-т, единств. в разл. на прост. (см. AN5, AN6 и § 3.5 из [ВИН]);
б) идеал кольца, факторкольцо, факторкольцо по максим. идеалу — поле (AN8 и § 9.2 из [ВИН])

Опр 1 Пусть A и B — кольца (алгебры над полем K) от-е $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм колец (алгебр), если

$$(x+y)\varphi = x\varphi + y\varphi \quad (xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi) \quad \forall x, y \in A$$

(и для алгебр $(\alpha x)\varphi = \alpha(x\varphi)$ $\forall \alpha \in K$ и $\forall x \in A$).

Из опр-я идеала $\Rightarrow$ Если $I \trianglelefteq A$, то от-е

$\pi: A \to A/I$ по правилу $a\pi = a+I$ — гом-зм,

он (как и в случае групп) наз-ся **канонический**.

<u>Т. 1 (о гом-зме)</u> Пусть $\varphi: A \to B$ — гом-зм колец.

Тогда 1) $\operatorname{Im}\varphi = \{a\varphi \mid a \in A\} \leq B$ (подкольцо в B)

2) $\operatorname{Ker}\varphi = \{a \in A \mid a\varphi = 0\} \trianglelefteq A$ (идеал в A)

3) От-е $\psi: A/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ по правилу

$(a+\operatorname{Ker}\varphi)\psi = a\varphi$ — изоморфизм.

<u>Д-во:</u> См. Т. 1 в § 9.2 из [ВИН].

Пример $A = K[x]$, $B = K$ и c — фикс. эл-т из K.

Отоб-е $\varphi: A \to B$ по правилу $f(x) \stackrel{\varphi}{\longmapsto} f(c)$ — гом-зм

$\mathrm{Im}\,\varphi = K$, $\mathrm{Ker}\,\varphi = (x-c)K[x]$ — все мн-ны, делящиеся на $x-c$. Поэтому $K[x]/_{\mathrm{Ker}\,\varphi} \simeq K$.

(сравни с теоремой Безу). Другие примеры см. [ВИ] после т. 9.2.1.

Чтобы опр-ть факторалгебру $A/_I$ алгебры A от идеала I доп. требуется, чтобы $\alpha I \subseteq I$ $\forall \alpha \in K$.

Опр-е гомоморфизма и теорема о гом-змах легко распространяется на алгебры.

Опр 2 Кольцо (алгебра) A расклад. в **прямую сумму** своих подколец (подалгебр) $A_1, \ldots A_k$, если

1) абелева группа A — прямая сумма аб. групп $A_1 \ldots A_k$ (в.п. A есть прямая сумма подпр-в $A_1 \ldots A_k$ в случае алгебр)

2) $A_i \cdot A_j = 0$ при $i \neq j$ (что равносильно тому, что $A_1, \ldots A_k$ — идеалы).

Опр 2' (внешнее) Прямая сумма колец (алгебр) $A_1, \ldots A_k$ — это прямая сумма $A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ их аддитивных групп (в.п. в случае алгебр) с покомпонентной операцией умножения:
$$(x_1, \ldots x_k)(y_1, \ldots y_k) = (x_1 y_1, \ldots x_k y_k).$$

<u>Предл 1</u> Опр-я 2 и 2' экв-ны в том смысле, что

$A \simeq A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, где A из опр 2.

<u>Д-во:</u> Также как и в случае групп...

<u>Предл 2</u> Если $A_1, \ldots A_k$ а) ассоц, б) комм, в) с единицей, то и $A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ тоже.

<u>ЗАД 1</u> Если $A_1, \ldots A_k$ без дел. нуля, верно ли это для $A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$?

<u>ЗАД 2</u> Док-ть, что $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l \Leftrightarrow (k, l) = 1$

и $n = kl$.

Далее, A - комм. ассоц. кольцо с 1.

Предл 3 Пусть $S \subseteq A$. Мн-во $(S) =$
$= \{a_1x_1 + \ldots + a_mx_m \mid x_1, \ldots, x_m \in S, a_1 \ldots a_m \in A\} \trianglelefteq A$,
при этом (S) - наим. идеал, содержащий S.

Опр 3 $I = (S)$ - идеал, порожденный мн-вом S.

Зад 3 Док-ть предл. 3

Опр 4 Идеал (x), порожденный одним эл-том x кольца A наз-ся ГЛАВНЫМ.

Опр5 Целостное кольцо, в котором все идеалы главные, наз-ся **кольцом главных идеалов** (Principle Integral Domain = PID).

Примеры 1) F - поле 2) $\mathbb{Z}$, но не $\mathbb{Z}_n$ в случае состав. n т.к там есть делители нуля.

3) Каждое евкл. кольцо — PID (см. предл 3 из AN 8 или Т. 9.2.2 из [ВИН].

4) Существуют неевкл. PID: например,

$$A = \left\{ a + b\sqrt{-19} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right\}$$ - подкольцо в $\mathbb{C}$

— неевклидово кольцо главных идеалов.

T.2 В кольце гл. идеалов A $\forall x, y \in A$ существует их наиб. общий делитель d и он может быть представлен в виде $d = ax + by$, где $a, b \in A$.

Д-во: Р-м мн-во $I = \{ax + by \mid a, b \in A\}$.

В силу предл. 3 — это идеал, порожд. x и y.

Т.к. A — PID, то $\exists r \in A$: $I = (r)$.

Эл-т r — искомый ▨

Мы будем иногда обозн. $I = (x, y) = (d)$.

Т-ма о сущ. и единств. разл. тоже сохр для PID (но не теорема о делении с остатком!).

Т. 3 Пусть u — ненулевой необр. эл-т кольца главных идеалов A. Фактор-кольцо $A/(u)$ является полем $\Longleftrightarrow$ u — простой эл-т кольца A.

Д-во: см. док-во т. 2 из AN8 (аналог. утв-е для евкл. колец) или т. 9.2.4 из [ВИН].

Т. 4 Пусть u и v — взаимно простые эл-ты кольца главных идеалов A. Тогда

$$A/(uv) \simeq A/(u) \oplus A/(v).$$

Д-во: см т. 9.2.5 из [ВИН]. | Указ. $\varphi: A \to A/(u) + A/(v)$
$a \mapsto (a+(u), a+(v))$
и т. 1 о гом-зме колец.

Примеры 1) $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l \iff n = kl$ и $(k,l) = 1$,

2) $f(x) = (x - c_1) \dots (x - c_n)$, где $c_1 \dots c_n$ – разл.

$\Rightarrow K[x]/(f) \simeq K[x]/(x-c_1) \oplus \dots \oplus K[x]/(x-c_n) \simeq$

$\simeq K \oplus \dots \oplus K = K^n$.