4. Линейные представления конечных групп

Напоминание: $\varphi : G \to GL(V)$ – линейное представление группы G, если φ – (групповой) гомоморфизм, т.е. $\forall x, y \in G$ $(xy)\varphi = x\varphi\, y\varphi$ и $e\varphi = \varepsilon$, где e – нейтр. эл-т гр. G и ε – тождеств. пр-е пр-ва V.

В частности, $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in G : x\varphi = \varepsilon\}$.

Пр-е φ наз-ся точным, если $\operatorname{Ker}\varphi = 1$, и тривиальным, если $\operatorname{Ker}\varphi = G$.

Использовать теорию к.м. ассоц. алгебр и их представлений для изучения представлений конечных групп позволяет след. определение.

Опр 1 Пусть G - кон. группа, F - поле. Групповой алгеброй группы G над полем F наз-ся алгебра FG, базисные элементы которой занумерованы эл-ми группы G, причём произведение базисных эл-тов с номерами $g, h \in G$ есть баз. эл-т с номером gh.

Зам. Отождествляя базисные эл-ты с их „номерами", получаем вложение $G \subseteq FG$. В этом случае произв. эл-т из FG записывается

$$a = \sum_{g \in G} a_g g, \text{ где } a_g \in F \ \forall g \in G. \qquad (*)$$

Предл 1 а) $A = FG$ - ассоц., к.м. алгебра с 1.

б) Имеется вз. однозн. соот-е между лин. пр-ями группы G и алгебры $A = FG$, причём неприводимым пр-ям G соотв. неприв. пр-я A и наоборот.

Д-во: а) Операция в G ассоц., $|G| < \infty$ и $e \in G$.

б) Если $\varphi : G \to GL(V)$, то $\tilde{\varphi} : A \to \mathcal{L}(V)$ по правилу $\left(\sum\limits_{g\in G} a_g g\right)\tilde{\varphi} = \sum\limits_{g\in G} a_g (g\varphi)$ — лин. пр-е алгебры A (говорят, что $\tilde{\varphi}$ продолжает φ).

Обратно, ограничение лин. пр-я алгебры A на G — лин. пр-е гр. G. Подпр-во U пр-ва V инв. отн-но $\varphi \Leftrightarrow U$ инв. отн-но $\tilde{\varphi}$. В частности, φ неприв. $\Leftrightarrow \tilde{\varphi}$ неприв. ∎

Мы будем часто использовать φ вместо ϕ и наоборот.

Всюду далее $|G| = n = \dim FG$.

<u>Т. 1</u> Если $\operatorname{char} F \nmid n$, то $A = FG$ полупроста.

<u>Д-во:</u> Восп. п.1 т. 3.2 (см. АТ19). Если ρ — правое регул. пр-е алгебры A, то $\forall g, h \in G$ имеем

$$(*2)\quad \operatorname{tr}(g\rho) = \begin{cases} n, & g = e \\ 0, & g \neq e \end{cases} \Rightarrow (g,h) = \operatorname{tr}((gh)\rho) = \begin{cases} n, & gh = e \\ 0, & gh \neq e. \end{cases}$$

При $\operatorname{char} F \nmid n$ $\forall g \in G$ $\exists h = g^{-1} \in G : (g,h) \neq 0 \Rightarrow$ скал. пр-е невырождено $\Rightarrow A$ полупроста ∎

Далее (если не оговорено особо) считаем $\underline{\underline{F = \mathbb{C}}}$.

Результат пред. параграфа (Т.5 из АТ19) + Т.1 ⟹

$$A = \mathbb{C}G \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} M_{n_i}(\mathbb{C}) \text{ для некот. } s \in \mathbb{N}.$$

Т.2 Группа G имеет с точностью до эквивалентности лишь конечное число неприводимых комплексных представлений. Их размерности $n_1, \dots, n_s$ удовл. рав-ву:

$$(*3) \qquad n_1^2 + \dots + n_s^2 = n \; (= |G|),$$

а их число s равно числу классов сопряженных эл-тов группы G.

Д-во: Первое утв-е вытекает из следствия 2 т-мы 3.5 (АТ19), а соотношение $(*3)$ из ф-лы $(*6)$ в т-ме 3.5. По сл. 1 из той же т-мы $s = \dim(Z(\mathbb{C}G))$.

Найдем $Z(A)$, где $A = \mathbb{C}G$. Эл-т $a \in Z(A) \Leftrightarrow \forall h \in G$

$$a = h^{-1} a h = h^{-1}\left(\sum a_g g\right) h = \sum a_g (h^{-1} g h).$$

Последнее означает, что коэф-ты при сопряженных эл-тах должны быть одинаковы. Сл-но, $Z(A)$ есть лин. оболочка эл-тов вида $\sum\limits_{g \in C} g$, где $C = \{h^{-1} g h \mid h \in G\}$ — класс сопряженных эл-тов с представителем g, а $\dim Z(A) =$ числу классов сопр. эл-тов ∎

<u>Пример 1</u> Если G абелева, то $s = |G|$, т.к. все классы сопр. эл-тов одноэл-ты $\underset{(*3)}{\Longrightarrow}$ $\forall i = 1..s$, $n_i = 1$, т.е. все неприв. представления гр. G одномерны, что согласуется со следствием 2 из леммы Шура (АТ 17).

Пример 2 Если $\varphi : G \to GL(V)$ и $\dim V = 1$, то $\operatorname{Im}\varphi$ абелева группа $\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \geqslant G'$ - коммутант группы G.

Иными словами одномерные представления G сводятся к представлениям аб. группы G/G'.

В частности, $G = G' \Leftrightarrow G$ имеет только трив. одномерное представление.

Упр 1 Д-ть, что $|G| = 24 \Rightarrow G \neq G'$.

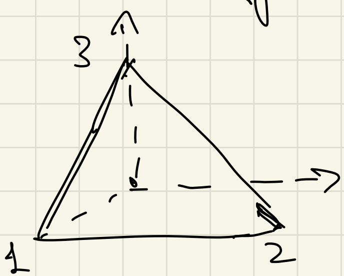
Упр 2 Группа S_n $(n \geqslant 2)$ имеет ровно 2 неприводим. одномерных пр-я тривиальное (т.е. $G\varphi = 1$) и $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ - знак подстановки.

Пример 3. $G = S_3$. Для G имеются след. неприв. пр-я:

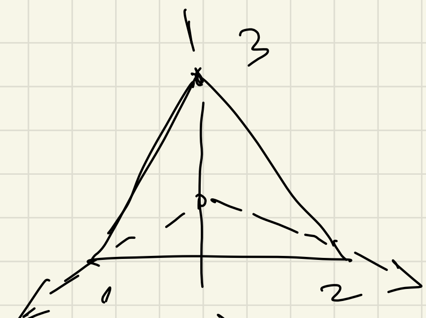
1) φ_1 — тривиальное (одномерное)

2) $\varphi_2 = \operatorname{sgn}$ — знак подстановки (одномерное)

3) $\varphi_3 : G \to S_\Delta \le GL_2(\mathbb{R}) \le GL_2(\mathbb{C})$ в группу симметрий прав. тр-ка:



или



$\varphi_3 : (1\,2) \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\varphi_3 : (1\,2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\varphi_3 : (1\,2\,3) \to \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\varphi_3 : (1\,2\,3) \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Проверьте, что φ_3 неприводимо над $\mathbb{C}$!

С точностью до экв-ти это все (над $\mathbb{C}$), так как в силу ф-лы (×3) из Т. 2 $n = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$,

<u>Упр 3</u> Покажите, что все неприв. (компл) представления группы S_4 таковы:

φ_1 — тривиальное; φ_1' — знак; $\varphi_2 : G \to G/K_4 \cong S_3 \to S_\Delta$ $(\dim \varphi_3 = 2)$.

композиция гом-зма $S_4 \to S_3$ и φ_2 из примера 3;

$\varphi_3 : G \to R$ — изоморфизм на группу вращений куба

$\varphi_3' : G \to T$ — изоморфизм на группу симметрий тетраэдра.

<u>Зам.</u> Из примера 3 и утв-я Упр4 вытекает, что все неприв. компл. представления гр. S_3 и S_4 явл-ся <u>комплексификациями</u> соотв. вещ. представлений.

Оказывается это верно и для S_n при любом n.

Упр 4 Описать все неприв. представления группы диэдра D_{2n} (группы симметрий прав. n-угольника).

Упр 5 Д-ть, что каждое неприв. представление гр. $G \times H$ есть тензорное произведение неприводимых представлений гр G и H (см. опр 4 и предл. 3 в АТ18).