5. Аффинные алгебр. многообразия и их идеалы

__Опр 1__ Пусть F – поле. Системой алгебраических уравнений S от переменных $x_1, \ldots x_n$ над полем F наз-ся набор $S = \{ f_i = 0 \mid f_i \in F[x_1 \ldots x_n], i \in I \}$.
Если $|I| < \infty$, то S – конечная система. Мн-во $X(S)$ – мн-во всех решений системы S. Системы S_1 и S_2 экв-ны ($S_1 \sim S_2$), если $X(S_1) = X(S_2)$.

__Опр 2__ Подмн-во $X \subseteq F^n$ наз-ся (аффинным) алгебраическим многообразием над полем F, если найдется система алгебр. ур-й (САУ) S, для которой $X(S) = X$.

Изучение теории алгебраических многообразий — основная задача алгебраической геометрии.

__Опр 3__ Идеалом системы $S = \{ f_i(x_1, \dots x_n) = 0 \mid i \in I \}$ наз-ся идеал $I(S) = (f_i \mid i \in I)$ кольца $F[x_1, \dots x_n]$.

__Предл 1__ Если $f \in I(S)$, то $f(x) = 0 \ \forall x \in X(S)$.

__Д-во:__ $f \in I(S) \Leftrightarrow f = r_1 f_{i_1} + \quad + r_m f_{i_m}$ для некоторых $i_1, \dots i_m \in I \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in X(S)$.

__Предл 2__ Пусть $\{f_1 \dots f_m\}$ и $\{g_1 \dots g_k\}$ два базиса в I. Тогда $S_1 = \{f_i = 0, i = 1..m\} \sim S_2 = \{g_j = 0, j = 1..k\}$.

__Д-во:__ Вытекает из предл. 1.

Т. 1 (Гильберта о базисе в „геом. форме") Любая САУ экв-на конечной системе.

Д-во: По „алг" т-ме Гильберта о базисе (т. 9.4.2) идеал $I(S)$ системы S имеет кон. базис $\{f_1, \dots, f_m\}$. В силу предл. 2 $S \sim \{f_1 = 0, \dots, f_m = 0\}$.

Упр 1 1) Любая система от одного переменного $\sim$ системе из одного ур-я

2) Любая система над $\mathbb{R}$ экв-на системе из одного ур-я. Указ. $\{f_1 = 0, \dots, f_m = 0\} \sim \{f_1^2 + \dots + f_m^2 = 0\}$

3) Система $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ над $\mathbb{C}$ не экв-на никакой системе из одного уравнения.

Недостаток опр-я идеала системы состоит в том, что у эквив-ных систем могут быть разные идеалы.

Пример $\{x=0\}\sim\{x^2=0\}$, но $(x^2)\neq(x)$.

Опр 4 Идеалом алг. многообразия $X\subseteq F[x_1..x_n]$ наз-ся $\mathcal{J}(X)=\{f\in F[x_1..x_n] \mid f(x)=0 \ \forall x\in X\}$.

Предл 3 $S_1\sim S_2 \Leftrightarrow \mathcal{J}(X(S_1))=\mathcal{J}(X(S_2))$.

Д-во: Т.к. $S_1\sim S_2 \Leftrightarrow X(S_1)=X(S_2)$, то необх. очевидна.

Д-м достаточность. Пусть $\mathcal{J}(X(S_1))=\mathcal{J}(X(S_2))$.

Т.к. $S_i\subseteq I(S_i)\subseteq \mathcal{J}(X(S_i))$ для $i=1,2$, то $\forall f\in S_1$: вып.ся $f\in \mathcal{J}(X(S_2)) \Rightarrow X(S_1)\subseteq X(S_2)$. Аналогично,

$X(S_2) \subseteq X(S_1)$ $\boxtimes$

Зам $\mathcal{I}(X(S))$ – наибольший идеал, зад. мн-с $X(S)$.

В предыд. примере $\mathcal{I}(X(\{x^2=0\})) = (x) = \mathcal{I}(X(\{x=0\}))$.

На вопрос как по идеалу $I(S)$ выяснить лежит ли $f \in \mathcal{I}(X(S))$ отвечает „Ком. верня" Т. Гильберта о нулях.

Опр 5 Пусть A - комм. ассоц. кольцо с единицей, $I \trianglelefteq A$. Мн-во $r(I) = \{a \in A \mid a^s \in I$ для некот $s \in \mathbb{N}\}$ наз-ся радикалом идеала I кольца A. Обозн. $r(I) = \sqrt{I}$.

Предл 4 1) $I \subseteq r(I)$ 2) $r(r(I)) = r(I)$ 3) $r(I) \trianglelefteq A$

Δ –во: Упр 2.

Предл 5 Пусть $I \trianglelefteq F[x_1 \ldots x_n]$. Тогда $X(I)=X(\sqrt{I})$.

Д-во $I \subseteq \sqrt{I} \Rightarrow X(\sqrt{I}) \subseteq X(I)$. Пусть $x \in X(I)$.
Если $f(x) \neq 0$ для $f \in \sqrt{I}$, то $f^s(x) = (f(x))^s \neq 0$
для любого $s \in \mathbb{N}$, что противоречит тому, что $f^s \in I$
для некот $s \in \mathbb{N}$ $\blacksquare$

Опр 6 Идеал I наз-ся радикальным, если
$r(I) = I$. (Из предл 4 $\Rightarrow$ радикал идеала — радикальный идеал).

Т. 2 (Гильберта о нулях в „геом" форме)
Для любой системы алг. ур-й S над алг. замк. полем F
$$\mathcal{I}(X(S)) = r(I(S)).$$

Другими словами, для мн-на $f \in F[x_1 \ldots x_n]$ выполнено $f(x) = 0 \ \forall x \in X(S) \iff \exists s \in \mathbb{N}$ $f^s \in I(S)$, где S – САУ над алг. замк. поля F.

<u>Д-во:</u> Если $f^s \in I(S)$, то $\forall x \in X(S)$ $f^s(x) = (f(x))^s = 0$

Пусть теперь $f(x) = 0 \ \forall x \in X(S)$, но $f^s \notin I \ \forall s \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим алгебру $A = F[x_1 \ldots x_n] / I(S)$ и канон. гом-зм $\pi: F[x_1 \ldots x_n] \to A$. Полагая $\pi(x_i) = u_i$, $i = 1..n$, имеем $A = F[u_1 \ldots u_n]$ – – алгебра к.п. над алг. замк. полем F. Пусть $a = \pi(f)$. Наше предположение о f означает, что a не нильпотентен в A. А значит, по т. 9.4.4

т.е. т. Г. о нулях в „алг. форме", $\exists$ гом-зм $\varphi: A \to F$, при котором $\varphi(a) \neq 0$.

По этому гом-зму мы укажем эл-т $x \in X(S)$, для которого $f(x) \neq 0$, приходя к противоречию.

$\forall x \in F^n$ можно опр-ть гом-зм $\psi_x: F[x_1 \dots x_n] \to F$ правилом $\psi_x(g) = g(x)$ $\forall g \in F[x_1 \dots x_n]$.

Обратно, если $\psi: F[x_1 \dots x_n] \to F$ – гом-зм, то $\exists x \in F^n: \psi = \psi_x$, достаточно взять $x = (\psi(x_1), \dots \psi(x_n))$. Таким образом, имеется биекция между F^n и мн-вом гом-мов из $F[x_1 \dots x_n]$ в F. (Проверьте!)

Если $x \in X(S)$, то $\psi_x(I(S)) = 0 \Rightarrow$
$\forall g \in f + I$ имеем $\psi_x(g) = \psi_x(f)$. Поэтому

Оп-е $\varphi_x : A = F[x_1 \dots x_n] / I(S) \to F$ по

правилу $\varphi_x(\pi(g)) = \psi_x(g)$, $g \in F[x_1 \dots x_n]$,
корректно опр-но $\forall x \in X(S)$ и явл-ся гом-мом
из A в F. При этом $\varphi_x(x_i) = \psi_x(x_i)$ - i-я коор. т. x.

Обратно, если $\varphi : A \to F$ - гом-зм, то найдется
$x \in X(S)$ такой, что $\varphi = \varphi_x$. Достаточно
положить $x = (\varphi(x_1), \dots \varphi(x_n))$.

Поскольку $\exists \varphi : A \to F : \varphi(a) \neq 0$, где $f = \pi(a)$
$\exists x \in X(S) : \varphi = \varphi_x \Rightarrow \varphi_x(a) \neq 0 \Rightarrow \psi_x(f) \neq 0$

$\Rightarrow f(x) \neq 0$ для $x \in X(S)$, противоречие. $\blacksquare$

<u>Следствие</u> СЛУ S над алг. замк. полем F несовместна

т.е. $X(S) = \varnothing \Leftrightarrow 1 \in I(S)$.

<u>Д-во:</u> Если $1 \in I(S)$, то ур-е $1 = 0$ можно добав-ть к $S \Rightarrow X(S) = \varnothing$.

Пусть $X(S) = \varnothing \Rightarrow J(X(S)) = F[x_1, .. x_n]$,

т.к. $J(X(S))$ - наиб. идеал, для мн-нов f из которого $\forall x \in X(S)\ f(x) = 0$. Поэтому $1 \in J(X(S)) = r(I(S))$

$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} : 1^s \in I(S)$, т.е. $1 = 1^s \in I(S)$ $\blacksquare$

Иногда это следствие называют т. Гильберта о нулях в слабой форме.

Упр 3 а) Покажите, что т. Гильберта не верна над $\mathbb{R}$

b) Если $f, f_1 \dots f_m \in \mathbb{R}[x]$ и $f = 0$ $\forall x \in \mathbb{C}^n$: $f_i(x) = 0$, $i = 1..m$, то $\exists\, r_1, \dots r_m \in \mathbb{R}[x]$:
$f = r_1 f_1 + \dots + r_m f_m$.

Следствие 2 САУ $S_1 \sim S_2 \Leftrightarrow r(I(S_1)) = r(I(S_2))$.

Зам Позволяет устанавливать $\sim$ систем, не находя их решений.

О соответствии между алг. мн. многообразиями в F^n и n-порождёнными алгебрами без нильп. элементов см. [ВИН] стр. 393-394.