② Полилинейная алгебра

0. Линейные функции и двойственность (напоминание)

Далее, V — в.п. (чаще всего к.м.) над полем F.

Опр 1 От-е $\alpha : V \to F$ — линейная ф-ция, если
1) $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$; 2) $\alpha(\lambda x) = \lambda \alpha(x)$ $\forall x,y \in V, \lambda \in F$.

Мн-во $Hom(V, F)$ всех лин. ф-ций — подпр-во в в.п. $F(V, F)$ всех ф-ций из V в F.

Опр 2 Пр-во $V^* = Hom(V, F)$ — сопряженное к V пр-во.

Пусть $e = \{e_1, \dots e_n\}$ — базис V и $x = \sum x_i e_i \in V$.

Тогда для $\alpha \in V^*$: $\alpha(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, где $a_i = \alpha(e_i)$.

Набор $e^* = \{e^1, \dots e^n\}$ лин. ф-ций из V^*, опред. правилом $e^i(x) = x_i$ – базис в V^*, называемый **сопряженным** к базису e.

Сопр. базисы связаны (и определяются) рав-ми:

$$(*) \quad e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Таким образом, $\dim V = \dim V^* \Rightarrow V \simeq V^*$

Но „хорошего" (не зависящего от выбора базисов) изоморфизма нет. Он есть между V и V^{**}

<u>Т.1</u> От-е $x \mapsto f_x$, где $x \in V$, а $f_x \in V^{**}$ и опр. ся $f_x(\alpha) = \alpha(x)$ $\forall \alpha \in V^*$, явл-ся изоморфизмом V и V^{**}

<u>Д-во:</u> см. т. 5.2.1 из [ВИН]

<u>Следствие</u> Каждый базис V^* сопряжен базису из V.

Далее, мы отождеств. V и V^{**}, исп. КАНОН. изом $x \mapsto f_x$.
После отождествления пишем $x(\alpha)$ вместо и $f_x(\alpha)$;

$$\boxed{(**) \qquad \alpha(x) = x(\alpha) \qquad \forall x \in V,\ \forall \alpha \in V^*}$$

— принцип двойственности. Он лежит в основе дуализма „частица-волна" в квантовой механике (подробнее см. [КосМ] в списке литературы).

<u>Упр1</u> Если $[x]$ и $[\alpha]$ — строки коорд-т x и α в базисах e и e^*, то $\alpha(x) = [\alpha][x]^T = [x][\alpha]^T = \alpha(x)$.

<u>Зам1</u> Это верно только в сопряж. базисах!

<u>Зам2</u> Если $\dim V = \infty$, то V не обязат. $\cong V^*$ и тем более V^{**}! См. Зам 1 на стр. 190 [ВиН].

Т. 2 Пусть V, U — к.м. в.п. над полем F. Если $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, U)$, то $\exists! \, \mathcal{A}^* \in \mathrm{Hom}(U^*, V^*)$ такой, что $\forall x \in V \ \forall \alpha \in U^*$

(***) $\alpha(\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^* \alpha) x$. Если $A = [\mathcal{A}]$ — м-ца $\mathcal{A}$, то $A^T = [\mathcal{A}^*]$ в сопряженных базисах.

Д-во. Единств. Пусть $\mathcal{A}_1^*, \mathcal{A}_2^* \in \mathrm{Hom}(U^*, V^*)$ обл. св-вом (***). Тогда $\forall x \in V \ \forall \alpha \in U^*$ $(\mathcal{A}_1^* \alpha)(x) = \alpha(\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}_2^* \alpha)(x)$. Т.к. это верно $\forall x \in V \Rightarrow \mathcal{A}_1^* \alpha = \mathcal{A}_2^* \alpha$

Последнее верно $\forall \alpha \in U^* \Rightarrow \mathcal{A}_1^* = \mathcal{A}_2^*$, ч.т.д.

Существование В сопряж. базисах $\alpha(\mathcal{A}x) = [\alpha][\mathcal{A}x]^T = [\alpha](A[x]^T) = ([\alpha]A)[x]^T$. Зададим от-е $\mathcal{A}^*$

правилом $[\mathcal{A}^*\alpha] = [\alpha]A$, оно линейно и $[\mathcal{A}^*] = A^T$,
т.к. $[\mathcal{A}^*][\alpha]^T = [\mathcal{A}^*\alpha]^T = ([\alpha]A)^T = A^T[\alpha]^T$.
Кроме того, $(\mathcal{A}^*\alpha)(x) = [\mathcal{A}^*\alpha][x]^T = ([\alpha]A)[x]^T =$
$= \alpha(\mathcal{A}x)$ по доказанному ∎

<u>Опр 3</u> Лин. от-е $\mathcal{A}^*$ из т. 2 наз-ся сопряженным к $\mathcal{A}$.

<u>Т.3</u> (св-ва сопр. op-а):

ЗАВИСИТ ОТ ВЫБОРА ИЗОМ-ЗМА $V \to V^{**}$.

1) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$ 2) $(\lambda\mathcal{A})^* = \lambda\mathcal{A}^*$.

3) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$ 4) $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$ (тожд. опер) 5) $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}$

6) $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$ (при канон. отожд. V и V^{**})

<u>Д-во</u>: $[\mathcal{A}^*] = A^T \Rightarrow \dots$ Упр 2 Док-ть т. 3.

Подробнее см. § 5.2 из [ВИН] и §7 из [КосМ].

---

1. Тензорное произведение векторных пр-в

Опр1 Пусть $V_1, \ldots V_p, U$ — в.п. над полем F.
От-е $\varphi: V_1 \times \ldots \times V_p \to U$ наз-ся полилинейным (или p-линейным), если оно линейно по каждому из p аргументов (при фикс. остальных).
Мн-во всех таких от-й $\mathcal{L}(V_1, \ldots V_p; U)$ или $\mathrm{Hom}(V_1, \ldots V_p; U)$ — вект. пр-во над F.
Ясно, что $\dim \mathrm{Hom}(V_1, \ldots V_p; U) = \dim V_1 \cdot \ldots \cdot \dim V_p \cdot \dim U$.

При $p=1$ мы получаем пр-во лин. от-й $\mathrm{Hom}(V,U)$.
При $U=F$ $\mathrm{Hom}(V_1,\dots V_p; F)$ – пр-во полилинейных ф-ций. В частности, $V^*=\mathrm{Hom}(V;F)$ – сопряжён-ное к V пр-во, т. е. пр-во линейных ф-ций (см. п. 0 (ранее в этой лекции).

Среди всех полилинейных от-й пр-в $V_1,\dots V_p$ имеется в некотором точном смысле универсаль-ное (см. ниже), его образ и есть тензорное произведение этих пр-в.

Для краткости мы сначала рассмотрим случай билинейных отображений ($p=2$).

Далее, мы рассматриваем $\mathcal{B} = \mathrm{Hom}(V; W; U)$, где V, W, U — (к.м.) в.п. над полем F.

<u>Предл 1</u> Пусть $\{e_i \mid i \in I\}$ и $\{f_j \mid j \in J\}$ — базисы в.п. V и W соот-но. След. св-ва $\varphi \in \mathcal{B}$ эк-ны:

1) $\{\varphi(e_i, f_j) \mid i \in I, j \in J\}$ — базис пр-ва U,

2) каждый $z \in U$ единств. образом предст. в виде $z = \sum\limits_{i \in I} \varphi(e_i, y_i)$, где $y_i \in W$

3) каждый $z \in U$ единств. образом предст. в виде $z = \sum\limits_{j \in J} \varphi(x_j, f_j)$, где $x_j \in V$.

Зам. В случае беск. мер. пр-в надо рассм-ть только суммы с кон. числом слагаемых $\neq 0$.

Д-во: $(1 \Leftrightarrow 2)$, поскольку $z = \sum_{i,j} z_{ij}\varphi(e_i, f_j)$

$\Leftrightarrow z = \sum_i \varphi(e_i, y_i)$, где $y_i = \sum_j z_{ij} f_j$.

$(1 \Leftrightarrow 3)$ док-ся аналогично $\blacksquare$

Следствие Св-во 1) от-я φ не зависит от выбора базисов в V и W.

Опр 2 Тензорным произведением в.п. V и W наз-ся в.п. $T = V \otimes W$ вместе с билин. от-ем

$$\otimes : V \times W \to T \text{ по правилу } (x, y) \mapsto x \otimes y,$$

удовл. след. условию: если $\{e_i \mid i \in I\}$ и $\{f_j \mid j \in J\}$ - базисы V и W, то $\{e_i \otimes f_j\}$ - базис пр-ва T.

Из опр. $\Rightarrow \dim T = \dim V \cdot \dim W$. Иногда $T = V \otimes_F W$.

Теорема 1 Тензорное произведение T пр-в V и W существует и единств. (с точностью до изоморфизма).

Д-во: **Сущ.** Возьмем в.п. T над тем же полем с базисом $\{t_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$ и определим били. от-е $\otimes : V \times W \to T$ правилом $e_i \otimes f_j = t_{ij}$ (оно не зависит от выбора базисов в силу следствия из предл. 1).

Единств. Пусть $(T_1, \otimes_1)$ и $(T_2, \otimes_2)$ — два тензорных пр-я. От-е базисов $\varphi : e_i \otimes_1 f_j \longmapsto e_i \otimes_2 f_j$ продолжается по линейности до изом-зма $\varphi : T_1 \to T_2$ ∎

<u>Пример:</u> $\otimes : F[x] \times F[y] \longrightarrow F[x,y]$

по ф-ле $(f \otimes g)(x,y) = f(x)\,g(y)$.

$\{x^i \mid i = 0..\infty\}$ — базис $F[x]$ и $\{y^j \mid j = 0..\infty\}$ — базис $F[y]$

При этом $\{x^i \otimes y^j = x^i y^j \mid i,j = 0..\infty\}$ — базис $F[x,y]$

по опр 2 $F[x,y] = F[x] \otimes F[y]$.

Аналогично, $F[x_1..x_m; y_1..y_n] = F[x_1..x_m] \otimes F[y_1..y_n]$.

<u>Предл 2</u> $\forall \varphi \in \mathfrak{B} = \mathrm{Hom}(V, W; U)$ сущ-ет единств. лин. от-е $\psi : T = V \otimes W \longrightarrow U$ такое, что

$(*)$ $\quad \varphi(x,y) = \psi(x \otimes y) \quad \forall x \in V,\ y \in W$.

<u>1-во:</u> Достаточно задать ψ на базисных векторах пр-ва T, полагая $\psi(e_i \otimes f_j) = \varphi(e_i, f_j)$ и проверить необх. св-ва

В силу опр 2 каждый $z \in V \otimes W$ единств. образом записывается $z = \sum_{i,j} z_{ij} (e_i \otimes f_j)$, $z_{ij} \in F$ (**)

Эл-ты z_{ij} — координаты z отн-но выбранных базисов

Если V и W — к.м. пр-ва, то z задается м-цей (z_{ij}).

Эл-т $z \in V \otimes W$ наз-ся разложимым (иногда говорят простой тензор), если $\exists x \in V$ и $y \in W$:

(***) $z = x \otimes y$.

Упр 1 Если $\dim V, \dim W > 1$, то не всякий эл-т $z \in V \otimes W$ разложим. Почему?

Упр 2 Если $z = x \otimes y$ разложим, то это представл. единств. с точностью до замены $x \to \lambda x$, $y \to \lambda^{-1} y$, $\lambda \in F^*$.

Важное применение тензорного умножения — операция расширения основного поля:

Пусть L — расширение поля F и V — в. п. над F, $V_L = L \otimes_F V$ — это в. п. над F.

С др. стороны, его можно расс-ть как в. п. над L, полагая $\alpha(\lambda \otimes v) = \alpha\lambda \otimes v$, где $\alpha, \lambda \in L$, $v \in V$. Можно считать, что $V \leq V_L$, отождествл. $v \in V$ с $1 \otimes v$ из V_L.

Если $\{e_i \mid i \in I\}$ — базис V (над F), то $\{1 \otimes e_i \mid i \in I\}$ базис V_L (над L), но (в этом весь смысл) там есть и другие базисы, в которых работать

удобнее (напр., над алг. замк. полем).

С др. стороны, если $\{\alpha_j \mid j \in J\}$ — базис L над F, то каждый $v \in V_L$ однозначно представляется в виде $\sum_j \alpha_j v_j$, где $v_j \in V$. Например, $\forall z \in V_{\mathbb{C}}$ имеем $z = x + iy$, где $x, y \in V_{\mathbb{R}}$.

<u>Предл 3</u> Пусть V, W, X — в. п. над F. Тогда

а) $V \otimes W \simeq W \otimes V$,

б) $(V \otimes W) \otimes X \simeq V \otimes (W \otimes X)$

<u>Д-во:</u> Упр 3. <u>Зам.</u> Изоморфны, но не <u>равны</u>!

Отождествляя при помощи изоморфизма из предл. 3 $(V \otimes W) \otimes X$ и $V \otimes (W \otimes X)$, мы можем опр-ть тензорное пр-е $V \otimes W \otimes X$ пр-в V, W, X. По индукции это распространяется на любое конечное число пр-в $V_1, \dots V_p$.

Предл. 4 Тензорные пр-я вида $e_{1 i_1} \otimes \dots \otimes e_{p i_p}$, где $e_{k i_k}$ – базис. вектор пр-ва V_k, $k = 1 \dots p$, образуют базис пр-ва $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$.

Д-во: Индукция по числу p $\blacksquare$

Обобщая предл. 2 мы получаем след.

осн. принцип тензорной алгебры:

Т. 2 Для любого p-линейного от-я $\varphi: V_1 \times \ldots \times V_p \to U$ существует единств. лин. от-е $\psi: V_1 \otimes \ldots \otimes V_p \to U$:

$$(****) \quad \varphi(x_1, \ldots, x_p) = \psi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)$$

Изоморфизм $\mathrm{Hom}(V_1, \ldots V_p; U) \simeq \mathrm{Hom}(V_1 \otimes \ \otimes V_p; U)$, определенный в Т. 2 НАЗ-СЯ канонический.

Пример Пусть сначала $\alpha \in V^*$, $\beta \in W^*$. Определим билинейную функц. $\alpha \otimes \beta : V \times W \to F$ правилом

$$(\alpha \otimes \beta)(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$$

Тогда $\otimes : V^* \times W^* \to \mathrm{Hom}(V, W; F)$ — билин. от-е

При этом, если $\{e^i \mid i \in I\}$ и $\{f^j \mid j \in J\}$ — базисы V^* и W^*, то $(e^i \otimes f^j)(x, y) = x_i y_j$, где x_i, y_j — коор-ты в-ров x и y

в базисах e_i и f_j. Так как всякая бил. ф-ция f на $V \times W$ однозн. предст. в виде $f(x,y) = \sum_{i,j} c_{ij} x_i y_j$, то $\{e^i \otimes f^j \mid i \in I, j \in J\}$ – базис в $Hom(V, W; F) \Rightarrow$

$$Hom(V, W; F) \simeq V^* \otimes W^*.$$

Аналогично,

$$Hom(V_1, \dots V_p; F) \simeq V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^*, \quad (*****)$$

здесь изоморфизм задается ф-лой:

$$(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p)(x_1 \dots x_p) = \alpha_1(x_1) \dots \alpha_p(x_p),$$

где $\alpha_i \in V_i^*$ и $x_i \in V_i$, $i = 1 \dots p$.

Из $(*****)$ и $(****)$ $\Rightarrow$

$$(V_1 \otimes \dots \otimes V_p)^* = V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^*.$$

Упр 4 Пусть $\alpha \in V^*$ и $y \in W$. Проверьте, что $\alpha \otimes y : V \to W$ по правилу $(\alpha \otimes y)(x) = \alpha(x) y$, $x \in V$, — линейное от-е. Поэтому $\otimes : V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ — билинейное от-е. Д-те, что

$$V^* \otimes W \simeq \mathrm{Hom}(V, W) \qquad (******)$$

Упр 5 Покажите, что

$$V_1^* \otimes \ldots \otimes V_p^* \otimes U \simeq \mathrm{Hom}(V_1, \ldots, V_p; U).$$

Опр 3 Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W)$ — лин. операторы пр-в V и W над F. Лин. оператор $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ на $V \otimes W$, заданный правилом

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(x \otimes y) = \mathcal{A}x \otimes \mathcal{B}y \quad \forall x \in V, y \in W,$$

НАЗ-СЯ тензорным произведением операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

<u>Предл 5</u> 1) Опр 3 корректно

2) Если $A = (a_{ij}) = [\mathcal{A}]$ в базисе $\{e_i \mid i = 1..n\}$

$B = (b_{ij}) = [\mathcal{B}]$ в базисе $\{f_j \mid j = 1..m\}$, то

в базисе $\{e_i \otimes f_j\}$ оператор $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ имеет м-цу

$$[\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}] = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Эта м-ца НАЗ-СЯ тензорным произведением м-ц A и B и обозн. $A \otimes B$.

<u>Упр 6</u> Если $\lambda_1 .. \lambda_n$ и $\mu_1 .. \mu_m$ — ХАР корни $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (с учетом кр-сти), то $\lambda_i \mu_j$ — хар. корни $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.