

## 2. Тензоры и их координаты

Пусть  $V$  —  $n$ -мерное в.ч. над полем  $F$ ,

Опр 1 Пусть  $p, q$  — неотриц. целые числа. Пр-во

$$T_{q,p}^p(V) = \underbrace{V \oplus \dots \oplus V}_p \oplus \underbrace{V^* \oplus \dots \oplus V^*}_q \text{ наз-ся}$$

пространством тензоров типа  $(p, q)$  на  $V$ ,

его эл-ты — тензоры на  $V$ , число  $p+q$

называют **валентностью** или **рангом** тензора.

Пр-во  $T_0^0(V)$  полагают равным полю  $F$ .

Очевидно, что  $\dim T_{q,p}^p = n^{p+q}$ .

Очевидно, что  $T_0^1(V) = V$ , а  $T_1^0(V) = V^*$ .

Тензоры из  $T_0^p(V)$  наз-ся **контравариантными**,  
а из  $T_q^0(V)$  **ковариантными**.

В силу доказанного в §1 (АТ8) имеет

$T_2^0(V) \cong \text{Hom}(V, V; F)$  - пр-во билинейных ф-ций,

$T_1^1(V) \cong \text{Hom}(V; V) = \mathcal{L}(V)$  - пр-во лин. пр-й пр-ва  $V$ ,

более общо,

$T_q^0(V) \cong \text{Hom}(V, \underbrace{V \dots V}_q; F)$  - пр-во  $q$ -лин. ф-ций

$T_q^1(V) \cong \text{Hom}(V, \underbrace{V \dots V}_q; V) \cong \text{Hom}(\underbrace{V \oplus \dots \oplus V}_q; V)$ .

На тензорах можно определить операцию

**тензорное произведение** след. образом.

Тензорное произведение  $p$ -в  $T_q^p(V)$  и  $T_s^r(V)$  определяется дуальным  $q$ -о  $s$ -о оператором

$$\otimes: T_q^p(V) \times T_s^r(V) \rightarrow T_{q+s}^{p+r}(V) \text{ правилом}$$

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_q) \otimes (x_{q+1} \otimes \dots \otimes x_{q+r} \otimes \alpha_{q+1} \otimes \dots \otimes \alpha_{q+s}) \\ = x_1 \otimes \dots \otimes x_{p+r} \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_{q+s} \text{ (и здесь используется линейность)}$$

Пример 1  $T_1^1(V) \otimes T_1^1(V) = (V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*) =$

$$= V \otimes V \otimes V^* \otimes V^* = T_2^2(V). \text{ При этом}$$

тензорное умножение  $\otimes: T_1^1(V) \times T_1^1(V) \rightarrow T_2^2(V)$  совпадает с тензорным умножением линейных операторов из  $\mathcal{L}(V)$  (см. подробнее § 8.2 из [Вик]).

Операторы **свертки** — это лнн. отображения

$$T_q^p(V) \rightarrow T_{q-1}^{p-1}(V) \quad (p, q \geq 0),$$

определяемое след. образом:

Существует каноническое от-е

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \xrightarrow{\quad} T_{q-1}^{p-1}(V), \text{ где}$$

$$(x_1, \dots, x_p, \alpha_1, \dots, \alpha_q) \mapsto \alpha_1(x_1) (x_2, \dots, x_p, \alpha_2, \dots, \alpha_q).$$

В силу осн. универсальной тензорной алгебры (т. 2 из § 1) существует единств. лнн. от-е  $T_q^p(W) \rightarrow T_{q-1}^{p-1}(W)$  при котором

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_q \mapsto \alpha_1(x_1) (x_2 \otimes \dots \otimes x_p \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_q).$$

Это лнн. от-е и есть **свертка** (по ми-ам  $x_i$  и  $\alpha_i$ ).

Пример 1) Пусть  $A = t \in T_1^1(V) = V \otimes V^*$

т.е., что свертка  $t$  — это след  $\text{tr}(A)$  оператора  $A$ .  
Достаточно проверить для разнотензорных тензоров,  
т.е. операторов вида  $A = \alpha \otimes \beta$ ,  $\alpha \in V$ ,  $\beta \in V^*$ .

Такой оператор имеет ранг 1, т.е.  $\dim \text{Ker } A = n-1$ .

Поскольку  $A$  действует как 0 на  $\text{Ker } A$  и как  $\alpha(\beta)$  на  $V/\text{Ker}(\beta) \Rightarrow \text{tr}(A) = \alpha(\beta)$

2) свертка  $A \otimes B$  по 2-му множеству  $V$  и 1-ое множество  $V^*$  — это произведение  $AB$ . Для разнотензорных:

$A = \alpha \otimes \beta$  и  $B = \gamma \otimes \delta$  имеют свертку  $A \otimes B$  по 2-му множеству  $V$  и 1-му множеству  $V^*$  — это оператор  $\alpha(\gamma)(\beta \otimes \delta)$ , действующий на  $x \in V$ :  $\alpha(\gamma)\beta(x)\delta$  и  $AB(x) = \beta(x)A(\gamma) = \alpha(\gamma)\beta(x)\delta$  и, что и требовалось

В случае, когда  $p=q$ , а мы применили спектр  $p$  раз, т.е. построили от-л из  $T_p^p(V) \rightarrow T_0^0(V) = \mathbb{F}$ , говорят о **канонич. спектре**.

### Координаты тензора

Пусть  $\{e_i\} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — базис  $V$  и  $\{e^i\} = \{e^1, \dots, e^n\}$  — сопряженный к нему базис  $V^*$ , т.е.  $e^i(e_j) = \delta_{ij}$  (см. § 0 из АТ 8 и п. 5 § 2 из [ВЧК]).

Если  $x \in V$ , а  $\alpha \in V^*$  мы говоримся числом  $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i = x^i e_i$  и  $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^j = \alpha_j e_j$  — **суперпозиция по индексам (ПРАВИЛО ЭЙНШТЕЙНА)**

В частности,  $\alpha(x) = \alpha_j x^j = x^j \alpha_j = x(\alpha)$  — принцип сокращения индексов (см. АТ 8).

Тогда мы  $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}\}$  - базис

$$T_q^p(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_p \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_q, \text{ то ясно что}$$

$t \in T_q^p(V)$  однозначно определена  $p$ - $q$ -н корд  $F$

$t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  — координаты  $t$  в каноническом базисе.

(говорят о коор-тах  $t$  в базисе  $(e_1, \dots, e_n)$  пространства  $V$ ).

Примеры  $x = x^i e_i$  и  $\alpha = \alpha_j e^j \Rightarrow t^i = x^i$  и  $t_j = \alpha_j$ .

$A = t \in T_1^1(V)$ , где  $A e_i = a_i^j e_j$  и  $[A] = (a_i^j)$ .

Вспомогательная  $\phi$ -гн  $f \in T_2^0(V)$ , где  $f = \alpha \otimes \beta$

$$\alpha = \alpha_i e^i, \beta = \beta_j e^j \in V^* \text{ и } f(xy) = (\alpha \otimes \beta)(xy) = \alpha(x) \beta(y) = \alpha_i x^i \beta_j y^j = f_{ij} x^i y^j, \text{ где } f_{ij} = \alpha_i \beta_j.$$

Typ 1 Записать в явном виде оператор

а) образ  $t \mapsto x$  из заданного оператора  $A$

б) произведений операторов  $A$  и  $B$ ,

Предп. 1 Пусть  $t = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$   
 $\in T_q^p(V)$  и  $u = u_{j_{q+1} \dots j_{q+s}}^{i_{p+1} \dots i_{p+s}} e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{p+s}} \otimes e^{j_{q+1}} \otimes \dots \otimes e^{j_{q+s}} \in T_s^r(V)$ .

$$1) (t \otimes u)_{j_1 \dots j_{q+s}}^{i_1 \dots i_{p+r}} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} u_{j_{q+1} \dots j_{q+s}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}}$$

2) если  $S$  — свертка  $t$  по первым  $m$ -м индексам, то

$$S_{j_2 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} = t_{j_2 \dots j_q}^{k i_2 \dots i_p}.$$

Д-во: Из определения.



Примеры Если  $A = x \otimes \alpha$ , то  $A_j^i = x^i \alpha_j$ .

то  $(A) = A_j^i$  - свертка  $A$  как элемента  $T_1^{-1}(V)$ .

Изменение коор-т при замене базиса

(возвращаясь см. н.3 §3 4.4 в [Косм] или н.4 §10а в

из [Кос2]): Если  $C = (C_k^i)$  - матрица перехода

от базиса  $\{e_i\}$  к базису  $\{\tilde{e}_i\}$  в  $n$ -ве  $V$ , то

$D = C^{-T} = (C^{-1})^T$  - матрица перехода от двойственного базиса  $\{e^i\}$  к  $\{\tilde{e}^i\}$  в  $n$ -ве  $V'$ , т.е.

$\tilde{e}_k = C_k^i e_i$  и  $\tilde{e}^k = d_i^k e^i$ . Поэтому для

$x = x^k e_k$  и  $\alpha = \alpha_k e^k$  имеем  $\tilde{x}^i = d_k^i x^k$  и

$\tilde{\alpha}_j = C_j^k \alpha_k$ . Несомненно теперь проверить, что

$$(\times) \quad \tilde{t}_{i_1' \dots j_q'}^{i_1' \dots i_p'} = d_{i_1' \dots i_p'}^{i_1' \dots i_p'} d_{j_1' \dots j_q'}^{j_1' \dots j_q'} c_{j_1' \dots j_q'}^{j_1' \dots j_q'} t_{j_1' \dots j_q'}^{i_1' \dots i_p'}$$

Препр 2 Ф-я (x) выражает преобразование коор-т тензоров при замене базиса  $np \rightarrow nV$ .

Упр 2 Покажите, что ф-я (x) приводит к классическому правилу  $B = C^{-1}AC$ , где  $B = [A]_{\tilde{e}_i}$  и  $A = [A]_{e_i}$ .

Замечание В классическом изложении тензоров тензор это  $ot-c \ t$ , которое относительно базиса  $\{e_i\}$   $np \rightarrow nV$  сводит в соот-е набор  $\{t_{j_1' \dots j_q'}^{i_1' \dots i_p'}\}$  из  $n^{p+q}$  элементов так, что при замене базиса

Этот набор меняется в соответствии с ф-лой (A)  
из упр. 2. (см. п. 4 § 3 ч. 3 из [КоеМ])

Несложно заметить, что при этом тензор  
пошится как  $(q+r)$ -линейная ф-ция  
(см. определ-е тензора из п. 6 [Кое2]).

В евкл. пр-ве  $V$  имеется тензор  $g \in T_2^0(V)$ ,  
определяющий скалярное пр-е. Если  
 $\{e^i\}$ -базис в  $V^*$ , то  $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$ . В более  
привычных нам терминах  $G = (g_{ij})$ -м-ца Грамма,  
где  $g_{ij} = (e_i, e_j)$ -скалярное пр-е соотв. базисных  
в-ров, Тензор  $g$  наз-ся **метрическим**.

Если  $t \in T_q^p(V)$  и  $g$  — метрический тензор в  $V$ ,  
 то свертка тензорного произведения  $g$  и  $t$   
 по любому (нижнему) индексу  $g$  и некоторому  
 (для опр.-ции первого) индексу  $t$  — это тензор  
 $\tilde{t} \in T_{q+1}^{p-1}(V)$ , коор-ты которого нах-ся по ф-ле:

$$\tilde{t}_{j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} = g_{jk} t_{j_1 \dots j_q}^{k i_2 \dots i_p} \quad (*)$$

Переход от  $t$  к  $\tilde{t}$  наз-ся **сжатием** первого  
 верхнего индекса. Т.к. м-та метрического  
 тензора обратима, то обратная операция  
 сужен. Обратная операция — **подъем индекса**.

Пример Пусть  $u \in T_0^1(V)$  - вектор в евкл. пр-ве.

Тогда существует коф-те  $g_{jk} x^j u^k = (x, u) = L(x) \in T_1^0(V)$

-линейная ф-ция. Тем самым, мы уже установили (уже известный нам) кан. изом-зм  $V$  и  $V^*$  для евкл. пр-ва

Упр 3 Запишите ф-лу скаляра в случае ортонормированного базиса (т.е.  $g_{jk} = \delta_{jk}$ ).

Упр 4 Используя операцию скаляра, установите изоморфизм (в евкл. пр-ве) пр-ва  $L(V)$  и к. операторов и пр-ва  $\text{Hom}(V, V; F)$  - к. л. л. ф-ции.