

Задачи 16

Теория групп: простые группы

Теоретический материал: файлы AT16.pdf; § 13 из [КМ]; гл. 10, § 5 из [ВИН].

К 27.04.2022:

Задачи:

1. Доказать, что простая группа действует на множестве своих силовских p -подгрупп точно и транзитивно.
2. Доказать (последовательно), что в простой группе порядка 60 а) 6 силовских 5-подгрупп, б) 10 силовских 3-подгрупп, в) 5 силовских 2-подгрупп.
3. Найти порядок группы $PSL_2(\mathbf{F}_q)$, где \mathbf{F}_q — поле из q элементов.
4. Используя предыдущие задачи доказать, что с точностью до изоморфизма есть только одна неабелева простая группа порядка 60, в частности, группы A_5 , $PSL_2(\mathbf{F}_4)$ и $PSL_2(\mathbf{F}_5)$, где \mathbf{F}_q — поле порядка q , изоморфны между собой.
5. Найти неабелеву простую группу, порядок которой больше порядка A_5 , но меньше порядка A_6 .
6. Доказать, что в группе, порядок которой делится на 2, но не делится на 4, есть нормальная подгруппа индекса 2. В частности, такая группа не проста.
7. Пусть p, q — различные простые числа, G группа порядка p^2q . Докажите, что либо силовская p -подгруппа, либо силовская q -подгруппа нормальна в G .

Со звездочкой:

8. Докажите, что группа $PSU_2(\mathbb{C}) = SU_2(\mathbb{C})/Z(SU_2(\mathbb{C}))$ проста.
9. Докажите, что простая группа, удовлетворяющая условиям задачи 5, единственна (с точностью до изоморфизма).