Задачи 4

Коммутативная алгебра: нётеровы кольца

Теоретический материал: файл AT4.pdf, гл. 9, § 4,6 из [ВИН].

К 24.11.2021:

Задачи:

1. Доказать *вторую теорему о гомоморфизмах* для произвольных колец и модулей:

а) если I — идеал, а B — подкольцо кольца A, то $J = B \cap I \trianglelefteq B$ и $(B+I)/I \simeq B/J$, в частности, B/J изоморфно подкольцу факторкольца A/I;

б) если K и N — подмодули A-модуля M, то $(K+N)/N \simeq K/(K \cap N)$, в частности, A-модуль $K/(K \cap N)$ изоморфен подмодулю фактормодуля M/N.

Всюду далее в задачах (если не оговорено особо) A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, а K — поле.

2. Верны ли следующие утверждения:

а) если $A[x]$ нётерово, то A нётерово;

б) если A не имеет делителей нуля и $A[x]$ — кольцо главных идеалов, то A — поле.

3. Зад. 64.24 из [КЗ].

4. Доказать теорему Гильберта о базисе в следующей формулировке. Пусть A нётерово, и $M \subseteq A[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда найдется конечное подмножество $\{m_1, \ldots, m_r\}$ в M такое, что каждый многочлен из $m \in M$ может быть представлен в виде: $m = m_1 a_1 + \ldots + m_r a_r$, где $a_i \in A[x_1, \ldots, x_n], i = 1, \ldots, r$.

5. Пусть I_0 — множество всех многочленов из $K[x, y]$, свободный член которых равен нулю. Доказать, что I_0 — идеал в $K[x, y]$ и $I_0 = (x, y)$. Указать еще какой-нибудь базис (то есть конечное порождающее множество) этого идеала.

6. Зад. 1 из § 9.4 из [ВИН].

На месяц:

7. Доказать (без предположения о нётеровости A), что в A найдется максимальный идеал.