# Задачи 5

## Коммутативная алгебра: алгебраические многообразия и их идеалы

Теоретический материал: файл AT5.pdf, гл. 9, § 6 из [ВИН], ПСШ, гл. 7, § 1, 2.

Всюду в задачах $F$ — поле.

**К 01.12.2021:**

**Задачи:**

1. Доказать, что
а) конечный набор точек в $F^n$,
б) конечный набор подпространств в $F^n$
являются алгебраическими многообразиями;
в) а множество $\{(x, y) \mid y = \sin x\} \subseteq \mathbb{R}^2$ не является.

2. Найти систему алгебраических уравнений над $\mathbb{C}$, задающих алгебраическое многообразие, состоящее из точек $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)$.

3. Упр. 1 из файла AT5.pdf.

4. Найти $J(X)$, где $X$ одно из следующих множеств:
а) $\{(x, y) \mid x^4 = y^2\} \subseteq \mathbb{C}^2$;
б) $\{(x, y) \mid x^2 - 2xy + y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$.

5. Найти $r(I)$, где $I$ один из следующих идеалов:
а) $I = (x^2)$;
б) $I = (x^2, y^3)$.

6. Упр. 3 из файла AT5.pdf.

7. Доказать, что над $\mathbb{C}$ система

$$\begin{cases} x^2 + xy - y + 1 = 0, \\ x^3 - x^2 + x + y^3 = 0, \\ y^4 + x^3 + yx^3 + x - 1 = 0 \end{cases}$$

несовместна, а системы

$$\begin{cases} x + 2y + 4yz^2 = 0, \\ 4xz^2 - y = 0, \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 2y + 4yz^2 = 0, \\ 4xz^2 - y = 0 \end{cases}$$

эквивалентны.

**Со звездочкой:**

8. Рассмотрим кривую $X$ в $\mathbb{C}^3$, заданную параметрически:

$$x = t^3, \quad y = t^4, \quad z = t^5, \quad t \in \mathbb{C}.$$

а) Доказать, что идеал $J(X)$ не порождается двумя элементами,
б) но порождается тремя.