Задачи 6

Коммутативная алгебра: факториальные кольца

Теоретический материал: файл AT6.pdf, гл. 9, § 2, 7 из [ВИН].

Всюду в задачах A — целостное кольцо, F — поле.

К 01.12.2021:

Задачи:

1. Разложить на простые множители
а) $x^2 + y^2$ в $\mathbb{C}[x, y]$, б) $x^3 + y^3 + z^3$ в $\mathbb{C}[x, y, z]$, в) числа $2, 3, 5$ в $Z[i]$.

2. Зад. 2 и 3 из § 9.2 из [ВИН].

3. а) Доказать, что $f(x) = (x - c_1) \cdot \ldots \cdot (x - c_n) - 1$, где c_i — различные целые числа, является простым элементом в кольце $Z[x]$.

б) Доказать, что $f(x) = (x - c_1) \cdot \ldots \cdot (x - c_n) + 1$, где c_i — различные целые числа, является простым элементом в кольце $Z[x]$ при $n > 4$. Найти возможные разложения для f на простые множители при $n \leq 4$.

4. Доказать, что в факториальном кольце радикал главного идеала — главный идеал.

5. Доказать, что конечное целостное кольцо является полем.

Со звездочкой:

6. Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}] = \{a + b\sqrt{-p} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ не является факториальным.

7. Изучить напечатанное мелким шрифтом в § 9.7 из [ВИН] (стр. 404-405). Решить задачи 3 и 4 из этого параграфа.