

Задачи 7

Коммутативная алгебра: базисы Грёбнера – Ширшова

Теоретический материал: файл AT7.pdf, гл. 7, § 3, 4 из [ПСШ], § 4.3-4.7, 5.1-5.3 и гл. 6 из [AP].

Всюду F — поле, а f_C — старший (относительно лексикографического порядка) одночлен многочлена f .

К 01.12.2021:

Задачи:

1. Пусть n — натуральное число, I — счётное множество, а $\mathcal{A} = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ — семейство упорядоченных n -ок неотрицательных целых чисел. Доказать, что не существует бесконечной цепочки строго убывающих относительно лексикографического порядка элементов из \mathcal{A} .

Указание. Индукция по n .

2. Доказать предложение 1 из лекции (см. файл AT7) об эквивалентности двух определений базиса Грёбнера идеала кольца $F[x_1, \dots, x_n]$.

Указание. Воспользоваться утверждением задачи 1.

3. Доказать предложение 2 из лекции (см. файл AT7) и показать с помощи него, что минимизация (упрощение 1) переводит базис Грёбнера снова в базис Грёбнера.

4. Показать, что алгоритм Бухбергера плюс минимизация есть

а) алгоритм Гаусса приведения системы к ступенчатому виду в случае систем линейных уравнений;

б) алгоритм Евклида нахождения НОД набора многочленов в случае многочленов от одной переменной.

5. В пункте а) задачи 4 переход к от минимального базиса к редуцированному (упрощение 2, см. файл AT7) есть обратный ход метода Гаусса, приводящий систему линейных уравнений к унифицированному ступенчатому виду.

6. Доказать предложение 4 из лекции (файл AT7): если многочлены $f, g \in F[x_1, \dots, x_n]$ не имеют зацепления, т.е. $(f_C, g_C) = 1$, то f, g образуют базис Грёбнера идеала $I = (f, g)$.

7. Найти базис Грёбнера идеала $I \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$ и редуцировать его, если

а) $I = (x^2 - 1, xy - y, xz + z)$;

б) $I = (x^2 - 1, xy - y, xz - z)$;

в) $I = (xy^2 - z - z^2, x^2y - y, y^2 - z^2)$.

Со звездочкой:

8. Доказать теорему 8 из лекции (файл AT7). Используя утверждение этой теоремы, указать алгоритм, определяющий лежит ли многочлен f в радикале идеала $(f_1, \dots, f_m) \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$. Используя полученный алгоритм, указать алгоритм, устанавливающий эквивалентность двух систем алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем.