2. Тензоры и их коор-ты.

Пусть V – n-мерное в.п. над полем F,

Опр 1 Пусть p, q – неотриц. целые числа. Пр-во

$$T^p_q(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p \text{ раз}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q \text{ раз}}$$

наз-ся **пространством тензоров типа** (p,q) на V, его эл-ты – **тензоры** на V. Число $p+q$ называют **валентностью** или **рангом** тензора. Пр-во $T^0_0(V)$ полагают равным полю F.

Очевидно, что $\dim T^p_q = n^{p+q}$.

Очевидно, что $T^1_0(V) = V$, а $T^0_1(V) = V^*$.

Тензоры из $T_0^p(V)$ наз-ся контравариантными, а из $T_q^0(V)$ ковариантными.

В силу доказанного в § 1 (АТ9п) имеем

$T_2^0(V) \simeq Hom(V, V; F)$ – пр-во билинейных ф-ций,

$T_1^1(V) \simeq Hom(V; V) = \mathcal{L}(V)$ – пр-во лин. пр-й пр-ва V,

более общо,

$T_q^0(V) \simeq Hom(\underbrace{V, V, \ldots V}_{q}; F)$ – пр-во q-лин. ф-ций

$T_q^1(V) \simeq Hom(\underbrace{V, \ldots V}_{q}; V) \simeq Hom(\underbrace{V\otimes \ldots \otimes V}_{q}; V)$.

На тензорах можно определить операцию тензорного произведения след. образом.

Тензорное произведение пр-в $T^p_q(V)$ и $T^r_s(V)$ определяет билинейную операцию

$\otimes : T^p_q(V) \times T^r_s(V) \to T^{p+r}_{q+s}(V)$ правилом

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q) \otimes (x_{p+1} \otimes \ldots \otimes x_{p+r} \otimes \alpha_{q+1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{q+s})$$

$= x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+r} \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_{q+s}$ (и затем продолжить по линейности!)

<u>Пример 1</u> $T^1_1(V) \otimes T^1_1(V) = (V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*) =$

$= V \otimes V \otimes V^* \otimes V^* = T^2_2(V)$. При этом тензорное умножение $\otimes : T^1_1(V) \times T^1_1(V) \to T^2_2(V)$ совпадает с тензорным умножением линейных операторов из § 1 (см. подробнее § 8.2 из [ВИН]).

Операция **свертки** — это лин. отображение

$$T^p_q(V) \to T^{p-1}_{q-1}(V) \quad (p, q \geq 0),$$

определяемое след. образом:

Имеется полилинейное от-е

$$\underbrace{V \times \ldots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{q} \to T^{p-1}_{q-1}(V), \text{ где}$$

$$(x_1, \ldots x_p, \alpha_1, \ldots \alpha_q) \mapsto \alpha_1(x_1)(x_2, \ldots x_p, \alpha_2 \ldots \alpha_q).$$

В силу осн. принципа тензорной алгебры (т. 2 из § 1) сущ-ет единств. лин. от-е $T^p_q(V) \to T^{p-1}_{q-1}(V)$ при котором

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \mapsto \alpha_1(x_1)(x_2, \ldots x_p, \alpha_2 \ldots \alpha_q).$$

Это лин. от-е и есть **свертка** (по ин-сам x_1 и α_1).

Пример 1) Пусть $A = t \in T_1^1(V) = V \otimes V^*$

Д-см, что свертка t — это след $\operatorname{tr}(A)$ оператора A.

Достаточно проверить для разложимых тензоров, т.е операторы вида $A = x \otimes \alpha$, $x \in V$, $\alpha \in V^*$.

Такой оператор имеет ранг 1, т.е. $\dim \operatorname{Ker} A = n-1$.

Поэтому A действует как 0 на $\operatorname{Ker} A$ и как $\alpha(x)$ на $V/\operatorname{Ker}(\alpha)$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tr}(A) = \alpha(x)$

2) свертка $A \otimes B$ по 2-му инд. по V и 1-ому инд. по V^* — это произведение AB. Для разложимых:

$A = u \otimes \alpha$ и $B = v \otimes \beta$ имеем свертка $A \otimes B$ по опр-ю — это оператор $\alpha(v)(u \otimes \beta)$, действ. на $x \in V$: $\alpha(v)\beta(x)u$.

Но $AB(x) = \beta(x)A(v) = \alpha(v)\beta(x)u$, что и требовалось.

В случае, когда $p=q$, и мы применили свертку p РАЗ, т.е. построили от-е из $T^p_p(V) \to T^0_0(V) = F$, говорят о **полной свертке**.

Координаты тензора

Пусть $\{e_i\} = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис V и $\{e^i\} = \{e^1, \dots, e^n\}$ – сопряженный с ним базис V^*, т.е. $e^i(e_j) = \delta_{ij}$ (см §0 из АТ9 и п.5 §2 из [ВЧН]).

Если $x \in V$, а $\alpha \in V^*$ мы договорился писать

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i = x^i e_i \quad \text{и} \quad \alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^j = \alpha_j e_j$$

– **суммирование по немым индексам (правило Эйнштейна)**

В частности, $\alpha(x) = \alpha_i x^i = x^i \alpha_i = x(\alpha)$ – принцип двойственности (см. АТ 8).

Поскольку $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}\}$ - базис

$T^p_q(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \ldots \otimes V^*}_{q}$, то для любого

$t \in T^p_q(V)$ однозначно определены эл-ты поля F

$t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ — координаты t в указанном базисе.

(говорят о коор-тах t в базе $(e_1 \ldots e_n)$ пр-ва V.

Примеры $x = x^i e_i$ и $\alpha = \alpha_j e^j \Rightarrow t^i = x^i$ и $t_j = \alpha_j$.

$\mathcal{A} = t \in T^1_1(V)$, где $\mathcal{A} e_i = a^j_i e_j$ и $[\mathcal{A}] = (a^j_i)$.

Билинейная ф-ция $f \in T^0_2(V)$, где $f = \alpha \otimes \beta$

$\alpha = \alpha_i e^i$, $\beta = \beta_j e^j \in V^*$ и $f(x, y) = (\alpha \otimes \beta)(x, y) =$

$= \alpha(x) \beta(y) = \alpha_i x^i \beta_j y^j = f_{ij} x^i y^j$, где $f_{ij} = \alpha_i \beta_j$.

Упр 1 Записать в этих обозначениях коор-ты

а) образа в-ра x под действием оператора $\mathcal{A}$

б) произведения операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$,

Предл. 1 Пусть $t = t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \in T^p_q(V)$ и $u = u^{i_{p+1} \dots i_{p+r}}_{j_{q+1} \dots j_{q+s}} e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{p+r}} \otimes e^{j_{q+1}} \otimes \dots \otimes e^{j_{q+s}} \in T^r_s(V)$.

1) $(t \otimes u)^{i_1 \dots i_{p+r}}_{j_1 \dots j_{q+s}} = t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} u^{i_{p+1} \dots i_{p+r}}_{j_{q+1} \dots j_{q+s}}$

2) если S – свертка t по первым ин-дам, то

$$S^{i_2 \dots i_p}_{j_2 \dots j_q} = t^{k i_2 \dots i_p}_{k j_2 \dots j_q}.$$

Д-во: Из определений.

Пример. Если $A = x \otimes \alpha$, то $A^i_j = x^i \alpha_j$.

$\operatorname{tr}(A) = A^i_i$ — свертка A как для $T^1_1(V)$.

Изменение коорд-т при замене базиса

(подробнее см. п.3 §3 ч.4 в [КосМ] или п.4 §1 гл.6 из [КоС2]): Если $C = (c^i_k)$ — м-ца перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{\tilde{e}_i\}$ в пр-ве V, то $D = C^{-T} = (C^{-1})^T$ — м-ца перехода от двойственного базиса $\{e^i\}$ к $\{\tilde{e}^i\}$ в пр-ве V', т.е.

$\tilde{e}_k = c^i_k e_i$ и $\tilde{e}^k = d^k_i e^i$. Поэтому для $x = x^k e_k$ и $\alpha = \alpha_k e^k$ имеем $\tilde{x}^i = d^i_k x^k$ и $\tilde{\alpha}_j = c^k_j \alpha_k$. Несложно теперь проверить, что

$$(*)\quad \tilde{t}^{i_1'\dots i_p'}_{j_1'\dots j_q'} = d^{i_1'}_{i_1}\dots d^{i_p'}_{i_p} c^{j_1}_{j_1'}\dots c^{j_q}_{j_q'}\, t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}.$$

<u>Предл 2</u> Ф-ла (*) выражает преобразование координат тензора при замене базиса пр-ва V.

<u>Упр 2</u> Покажите, что ф-ла (*) приводит к классическому равенству $B = C^{-1}AC$, где $B = [\mathcal{A}]_{\tilde{e}_i}$ и $A = [\mathcal{A}]_{e_i}$.

<u>Замечание</u> В классическом изложении тензоров тензор это от-е t, которое каждому базису $\{e_i\}$ пр-ва V ставит в соот-е набор $\{t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\}$ из n^{p+q} скаляров так, что при замене базиса

этот набор меняется в соответствии с ф-лой (*) из предл 2. (см. п. 4 § 3 ч. 3 из [КосМ])

Несложно заметить, что при этом тензор понимается как $(q+p)$-линейная ф-ция (см. опр-е тензора из гл. 6 [Кос2]).

В евкл. пр-ве V имеется тензор $g \in T^0_2(V)$, определяющий скалярное пр-е. Если $\{e^i\}$-базис в V^*, то $g = g_{ij}\, e^i \otimes e^j$. В более привычных нам терминах $G = (g_{ij})$ - м-ца Грама, где $g_{ij} = (e_i, e_j)$ - скалярное пр-е соотв. базисных в-ров. Тензор g наз-ся метрическим.

Если $t \in T^p_q(V)$ и g — метрический тензор в V, то свертка тензорного произведения g и t по могому (нижнему) индексу g и некоторому (для опр-сти первому) индексу t — это тензор $\tilde{t} \in T^{p-1}_{q+1}(V)$, коор-ты которого нах-ся по ф-ле:

$$\tilde{t}^{i_2 \ldots i_p}_{j j_1 \ldots j_q} = g_{jk} t^{k i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \qquad (*)$$

Переход от t к $\tilde{t}$ наз-ся спуском первого верхнего индекса. Т.к. м-ца метрического тензора обратима, то обратима и операция спуска. Обратная операция — подъем индекса.

Пример. Пусть $u \in T^1_0(V)$ — вектор в евкл. пр-ве. Тогда спуск и по ф-ле $g_{jk} x^j u^k = (x, u) = \alpha(x) \in T^0_1(V)$ — линейная ф-ция. Тем самым, мы установили (уже известный нам) кан. изом-зм V и V^* для евкл. пр-в

Упр 3. Запишите ф-лу спуска в случае орто-нормированного базиса (т.е $g_{jk} = \delta_{jk}$).

Упр 4. Используя операцию спуска, установите изоморфизм (в евкл. пр-ве) пр-ва $\mathcal{L}(V)$ лин. операторов и пр-ва $Hom(V, V; F)$ — билин. ф-ций.