4. Симметрическая и внешняя алгебры

<u>Опр 1</u> Полилинейное отоб-е $\varphi : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p} \to U$

наз-ся симметрическим, если

$$\varphi(x_{1\sigma}, \ldots x_{p\sigma}) = \varphi(x_1, \ldots x_p) \quad \forall \sigma \in S_p$$

и кососимметрическим, если

$$\varphi(x_{1\sigma}, \ldots x_{p\sigma}) = \operatorname{sgn} \sigma \, \varphi(x_1, \ldots x_p) \quad \forall \sigma \in S_p.$$

<u>Зам.</u> В случае кососим. от-я будем считать $\operatorname{char} F \neq 2$.

Пусть далее $\{e_i, i = 1..n\}$ – базис пр-ва V над полем F.

<u>Опр 2</u> В.п $\mathring{S}$ вместе с симметр. p-линейным от-ем

$$(*) \quad V \times \ldots \times V \to \mathring{S}, \quad (x_1, \ldots x_p) \mapsto x_1 \vee \ldots \vee x_p,$$

наз-ся p-й симметрической степенью пр-ва V,

если в-ры $e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_p}$, $i_1 \leq \ldots \leq i_p$, составляют базис пр-ва S. Обозн: $S = S^p(V)$.

В. п. Λ вместе с кососим. p-лин. от-ем

(*2) $V \times \ldots \times V \longrightarrow \Lambda$, $(x_1, \ldots x_p) \longmapsto x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$,

наз-ся **p-й внешней степенью** пр-ва V, если в-ры $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$, $i_1 < \ldots < i_p$, составляют базис пр-ва V. Обозн: $\Lambda = \Lambda^p(V)$.

<u>Упр 1</u> Если $\dim V = n$, то

$$\text{а) } \dim \Lambda^p(V) = C_n^p \quad \text{б) } \dim S^p(V) = C^p_{p+n-1}.$$

Опр 2 не зависит от выбора базиса: если $\tilde{e}_i$, $i = 1..n$, другой базис пр-ва V, то $\tilde{e}_{i_1} \vee \ldots \vee \tilde{e}_{i_p}$, $i_1 \leq \ldots \leq i_p$, и $\tilde{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{e}_{i_p}$, $i_1 < \ldots < i_p$, составляют базисы пр-в S и Λ,

т.к. их число совпадает с разм-стью этих пр-в и в-ры $e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_p}$ (соот-но $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$) через них выр-ся,

<u>Т.1</u> Симметрическая (внешняя) р-я степень пр-ва V существует и единственна.

<u>Д-во:</u> <u>Сущ</u> Возьмем в.п. S с базисом $\{S_{i_1 i_2 \ldots i_p} \mid i_1 \le \ldots \le i_p\}$ и опр-ть р-лин. от-е $(*)$, задаев его по ф-ле $e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_p} = S_{j_1 \ldots j_p}$, где $\{i_1, \ldots i_p\} = \{j_1, \ldots j_p\}$ и $j_1 \le \ldots \le j_p$.

<u>Единств</u> Если (S_1, V_1) и (S_2, V_2) – две р-е сим. степени пр-ва V, то $\exists!$ из-зм $\varphi: S_1 \to S_2$,

удовл. условию $\psi(x_1 \vee_1 \dots \vee_1 x_p) = x_1 \vee_2 \dots \vee_2 x_p$, $\forall x_1 \dots x_p \in V$. Действ-но, достаточно положить

$$\psi(e_{i_1} \vee_1 \dots \vee_1 e_{i_p}) = e_{i_1} \vee_2 \dots \vee_2 e_{i_p} \quad (i_1 \leq \dots \leq i_p).$$

Для $\Lambda^p(V)$ док-во полностью аналогично.

Как и тензорное пр-е сим. и внешняя p-степени обладают св-вом универсальности.

<u>Предл 1</u> Для любого сим. (кососим) p-лин. ф-я $\varphi: \underbrace{V \times \dots \times V}_{p} \to U$ сущ-ет единств. лин. от-е $\psi: S^p(V) \to U$ такое, что

$$\varphi(x_1 \dots x_p) = \psi(x_1 \vee \dots \vee x_p).$$

или соот-но $\psi: \Lambda^p(V) \to U$ такое, что

$$\varphi(x_1 \dots x_p) = \psi(x_1 \wedge \dots \wedge x_p).$$

Д-во: Для симм. от-я φ искомое лин. от-е $\tilde{\varphi}$ задается на базисных в-рах пр-ва $S^p(V)$ по ф-лам:

$$(*3)\ \tilde{\varphi}(e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_p}) = \varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \quad (i_1 \leq \ldots \leq i_p),$$

Ввиду сим-сти φ эта ф-ла вып-ся и для любых наборов $i_1, \ldots, i_p$, а отсюда по линейности вытекает $(*3)$.

Для кососим. от-я д-во аналогично ∎

Если $x_1, \ldots, x_p \in V$, то эл-т $x_1 \vee \ldots \vee x_p$ (соотв. $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$) наз-ся разложимым. Предл. 1 позволяет опр-ть лин. от-я пр-в $S^p(V)$ и $\Lambda^p(V)$, задавая их только на разл. эл-тах (так чтобы выполнялись условия линейности и сим-сти).

Предл. 2 Билинейные об-я

$\vee : S^p(V) \times S^q(V) \to S^{p+q}(V)$ такое, что

$$(x_1 \vee \ldots \vee x_p) \vee (x_{p+1} \vee \ldots \vee x_{p+q}) = x_1 \vee \ldots \vee x_{p+q} \qquad (*4)$$

и $\wedge : \Lambda^p(V) \times \Lambda^q(V) \to \Lambda^{p+q}(V)$ такое, что

$$(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p) \wedge (x_{p+1} \wedge \ldots \wedge x_{p+q}) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{p+q} \qquad (*5)$$

корректно опр-ют операции умножения на пр-вах $S(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S^p(V)$ и $\Lambda(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda^p(V)$.

Опр 3 $S(V)$ – симметрическая алгебра пр-ва V.

$\Lambda(V)$ – внешняя алгебра (алгебра Грассмана) пр-ва V.

Алгебры $S(V)$, $\Lambda(V)$, как и тензорная алгебра $T(V)$ являются градуированными в смысле след. опр-я:

Опр 4 Разложение алгебры $A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A_d$ в прямую сумму своих подпр-в A_d, $d \in \mathbb{Z}$, удовл. условию $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$, наз-ся градуировкой алгебры A, а сама A — градуированной алгеброй.

Упр 2 От-е $S(V) \to F[x_1, \dots x_n]$ по правилу $e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_p} \mapsto x_{i_1} \dots x_{i_p}$ задает изоморфизм алгебры $S(V)$ и алгебры мн-нов $F[x_1 .. x_n]$. В частности, алгебра $S(V)$ — бесконечномерная ассоц. коммутативная алгебра с 1.

Упр 3 Алгебра Грассмана $\Lambda(V)$ конечномерная ($\dim \Lambda(V) = 2^n$) ассоц. алг. с 1. Она не коммут., но

суперкоммутативна, т.е. $u\wedge v=(-1)^{pq}v\wedge u$, где $u\in\Lambda^p(V)$, $v\in\Lambda^q(V)$.

Зам. Св-во суперкомм-сти опр-ся только для градуированных алгебр.

Далее (в случае char $F=0$) мы отождествим пр-ва $S^p(V)$ и $\Lambda^p(V)$ с некоторыми подпр-вами в $T^p(V)$. Для этого нам потребуется след. опр-я.

$\forall\sigma\in S_p$ (т.е. подстановки σ на p символах) опр-м лин. пр-е f_σ пр-ва $T^p(V)$ правилом $t\mapsto t^\sigma$:

$(x_1\otimes\ldots\otimes x_p)^\sigma=x_{1\sigma}\otimes\ldots\otimes x_{p\sigma}$ (корректность выводится из осн. принц. тенз. алг.)

Отметим, что $((x_1\otimes\ldots\otimes x_p)^\sigma)^\tau=(x_{1\sigma}\otimes\ldots\otimes x_{p\sigma})^\tau=$
$=x_{1\sigma\tau}\otimes\ldots\otimes x_{p\sigma\tau}$, т.е. $t^{\sigma\tau}=(t^\sigma)^\tau$ $\forall t\in T^p(V)$.

Опр 5 Тензор $t \in T^p(V)$ наз-ся **симметрическим** (соотв. **кососимметрическим**), если $\forall \sigma \in S_p$ $t^\sigma = t$ (соотв. $t^\sigma = \operatorname{sgn}\sigma\, t$). Сим. (кососим) тензоры образуют подпр-во в $T^p(V)$, которое обозн. $ST^p(V)$ (соотв. $\Lambda T^p(V)$).

Далее считаем, что $\operatorname{char} F = 0$.

В пр-ве $T^p(V)$ опр-ся операторы **симметрирования**: $\operatorname{Sym}(t) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} t^\sigma$, и

альтернирования: $\operatorname{Alt}(t) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}\sigma\, t^\sigma$.

Т.к. $\operatorname{Sym}(t) \in ST^p(V)$ и $\operatorname{Sym}(\operatorname{Sym}(t)) = \operatorname{Sym}(t)$, то

Sym — оператор проектирования из $T^p(V)$ на $ST^p(V)$.
Аналогично, Alt - оператор проектирования на $\Lambda T^p(V)$.

<u>Предл 3</u> Если char $F = 0$, то имеется изоморфизм(ы)
$\mu : S^p(V) \to ST^p(V)$ т.ч. $\mu(x_1 \vee \ldots \vee x_p) = \mathrm{Sym}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)$
и $\mu : \Lambda^p(V) \to \Lambda T^p(V)$ т.ч. $\mu(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p) = \mathrm{Alt}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)$

<u>Д-во:</u> см. д-во предл. 2 из §3 и 4 гл. 8 из [ВИн] ∎

<u>Упр 4</u> Д-ть, что $T^2(V) = ST^2(V) \oplus \Lambda T^2(V)$, но
при $\dim V > 1$ $T^p(V) \neq ST^p(V) \oplus \Lambda T^p(V)$ при $p > 2$.

В алгебре $T(V)$ естественно опр-ся подпр-ва
(но не подалгебры!) :

$$ST(V)=\bigoplus_{p=0}^{\infty} ST^p(V) \quad \text{и} \quad \Lambda T(V)=\bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda T^p(V)$$

но (исп. из-ни μ из предл 2) мы можем ввести на них операции умножения:

$$t \vee u = \mathrm{Sym}(t \otimes u) \quad \text{и} \quad t \wedge u = \mathrm{Alt}(t \otimes u)$$

Применяя к сопр. пр-ву V^*, положим

$S_p(V)=S^p(V^*)$, $ST_p(V)=ST^p(V^*)$ – пр-во симм p-лин. ф-ций

$\Lambda_p(V)=\Lambda^p(V^*)$, $\Lambda T_p(V)=\Lambda T^p(V^*)$ – пр-во кососим. p-лин. ф-ций.

Если $\alpha \in T_p(V)=T^p(V^*)$, то

$$(\mathrm{Sym}\,\alpha)(x_1, \ldots x_p) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \alpha(x_{1\sigma}, \ldots x_{p\sigma})$$

$$(\mathrm{Alt}\,\alpha)(x_1, \ldots x_p) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sgn}\sigma\, \alpha(x_{1\sigma} \ldots x_{p\sigma}).$$

Каждой симм. p-лин. ф-ии $\alpha \in ST_p(V)$ ставится в соотв. мн-н $f_\alpha \in S_p(V)$ по ф-ле

$$f_\alpha(x) = \alpha(x, \ldots, x)$$

(при $p=2$ каждой сим. билин. ф-ии соотв. — квадратичная)

Предл. 4 Если $\operatorname{char} F = 0$, то отоб-е $ST_p(V) \to S_p(V)$, $\alpha \mapsto f_\alpha$, есть изом-зм в.п., обратный к изо-зму $\mu : S_p(V) \to ST_p(V)$.

Д-во: См. д-во предл. 8.3.3 из [ВИН] $\blacksquare$

Сим. ф-ия α — поляризация однородного мн-на f_α

Упр 5 Покажите, что поляризацией мн-на

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 x_3 \in F[x_1, x_2, x_3]$$

явл-ся сим. трилин. ф-ция

$$\alpha(x, y, z) = x_1 y_1 z_1 + \frac{1}{3}(x_3 y_2 z_2 + x_2 y_3 z_2 + x_2 y_2 z_3).$$

Умножение в алгебрах $ST_*(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} ST_p(V)$

$\Lambda T_*(V) = \bigotimes_{p=0}^{\infty} \Lambda T_p(V)$ выглядит след. образом:

$$(\alpha \vee \beta)(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \frac{p!\,q!}{(p+q)!} \sum_{\substack{i_1 \ldots i_p \\ i_{p+1} \ldots i_{p+q}}} \alpha(x_{i_1} \ldots x_{i_p})\,\beta(x_{i_{p+1}} \ldots x_{i_{p+q}})$$

— симм. пр-е ф-ций α и β.

$$(\alpha \wedge \beta)(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \frac{p!\,q!}{(p+q)!} \sum_{\ldots} \operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_{p+q}) \ldots$$

— внешнее пр-е ф-ций α и β.

Если $\alpha_1, \dots \alpha_p \in V^*$, то

$$(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_p)(x_1, \dots x_p) = \frac{1}{p!} \operatorname{per}(\alpha_i(x_j)),$$

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p)(x_1 \dots x_p) = \frac{1}{p!} \det(\alpha_i(x_j)),$$ где

per и det — перманент и детерминант м-цы $(\alpha_i(x_j)) = A_{ij}$.

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

Аналогично, тензорной степени лин. оператора $\sqrt{\ }$ можно опр-ть симметрическую и внешнюю:

$$S^p \mathcal{A}(x_1 \vee \dots \vee x_p) = \mathcal{A}x_1 \vee \dots \vee \mathcal{A}x_p$$

$$\Lambda^p \mathcal{A}(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \mathcal{A}x_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}x_p$$

Упр 6 Д-те, что $\operatorname{tr} S^2 A = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A^2 + (\operatorname{tr} A)^2)$ и $\operatorname{tr} \Lambda^2 A = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A^2 - (\operatorname{tr} A)^2)$.

Если сим. алгебра — новый взгляд на алгебру мн-нов, то алгебра Грассмана — развитие теории определителей в лин. алгебре.

Т. 2 1) Набор векторов $a_1, \ldots a_p$ из-ва V лин. зав $\Longleftrightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_p = 0$.

2) Если наборы в-ро $a_1, \ldots a_p$ и $b_1 \ldots b_p$ лин. незав., то $\langle a_1 \ldots a_p \rangle = \langle b_1 \ldots b_p \rangle \Longleftrightarrow a_1 \wedge \ldots \wedge a_p$ и $b_1 \wedge \ldots \wedge b_p$ пропорциональны.

Д-во. см. док-во Т. 8.4.1 из [ВИН].