

2. Действие группы на мн-ве

Опр 1 **Действием** группы G на мн-ве Ω наз-ся произв. юн.зм $\varphi: G \rightarrow S(\Omega)$ из G в симметрическую группу подстановок мн-ва Ω .
Обозн: $G \curvearrowright \Omega$ и $\alpha \circ g = \alpha(g\varphi)$ - образ $\alpha \in \Omega$ под действием $g \in G$.

Преп 1 Если $G \curvearrowright \Omega$, то

- 1) $\alpha \circ (gh) = (\alpha \circ g) \circ h \quad \forall \alpha \in \Omega \quad \forall g, h \in G,$
- 2) $\alpha \circ e = \alpha \quad \forall \alpha \in \Omega$ и нейтр. э-ре $e \in G.$
- 3) $\alpha \circ g = \beta \Rightarrow \beta \circ g^{-1} = \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega \quad \forall g \in G.$

1-Вод Одр. 2 ром-ЗМА зручн и лбо жем. СВ-ВА

Yup 1 (cr. yup 9.6.7 \cup $[B \wedge \neg]$)

Примеры (1) Если $G \leq S(\Omega)$, то тождеств. вложение $\varphi: G \rightarrow S(\Omega)$, $g \mapsto g$, определяет лев. генерацию $z \circ g = zg$ G на Ω .

(2) Es kann $G \leq GL(V)$, ^(Torsion) to homomorphism $\varphi: G \rightarrow GL(V) \leq S(V)$, $g \mapsto \varphi_g$, surjektiver Abb. sein, wobei $\varphi \circ g = \varphi_g$.

(3) Es sei $\Sigma = G$, so kann man $\varphi: G \rightarrow S(G)$, konstruieren.
 Man-ry g nachfolgend $\begin{pmatrix} x \\ xg \end{pmatrix}$, $x \in G$, $\exists A \Delta \Delta \Delta$

действие G на себе **правыми сдвигами**.

(4) Если $H \leq G$ и $\Omega = G/H$, то пом-зи $G \rightarrow S(G/H)$,
отпр. $g \in G$ в погесловку $\begin{pmatrix} Hx \\ Hxg \end{pmatrix}$, $Hx \in G/H$,
задает действие G на G/H **правыми сдвигами**

(5) Если $\Omega = G$, то пом-зи $G \rightarrow S(G)$, отпр.
 $g \in G$ в погесловку $\begin{pmatrix} x \\ xg \end{pmatrix}$, $x \in G$, задает
действие G на себе **сопряженными**. $\cong S(G)$

(6) Если $\Omega = H$ - группа, то пом-зи $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(H)$,
отпр. g в авт-зм гп группы H , т.е. погесловку
 $\begin{pmatrix} h \\ h^g \end{pmatrix}$, $h \in H$, из $S(H)$, задает действие G на H
автоморфизмами.

Зам. Асно, что $\textcircled{3}$ и $\textcircled{5}$ — частные случаи $\textcircled{4}$ и $\textcircled{6}$ соответственно.

Опр 2 Пусть гом-зм $\varphi: G \rightarrow S(\Omega)$ задает действие G на Ω . Ядро $\text{Ker } \varphi$ наз-ся **ядром действия**.

Действие наз-ся **точным**, если $\text{Ker } \varphi = 1$.

Упр 2 Найти ядро действия в примерах $\textcircled{1}$ – $\textcircled{6}$

Опр 3 Пусть $G \curvearrowright \Omega$, $\alpha \in \Omega$.

$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha g = \alpha\}$ — стабилизатор α в G

$\alpha G = \{\alpha g \mid g \in G\}$ — орбита α пог действия G .

G действует на Ω **транзитивно**, если $\alpha G = \Omega$ для $\alpha \in \Omega$.

Т. 1 Пусть $G \curvearrowright \Omega$. Тогда

- (1) лн-во орбит действия — разбиение лн-ва Ω .
- (2) G_2 — нормальная группа G
- (3) $\forall \alpha \in \Omega$ лн-ва G/G_2 и αG равномощны.

Д-во: см. д-во Т. 9, Г. 1 из [ВАН] \square

Следствие Если $|G| < \infty$, то $|G| = |G_2| |\alpha G|$

$\forall \alpha \in \Omega$. В частности, если G транзитивно действует на Ω , то $|G| = |G_2| \cdot |\Omega|$.

Примеры (в том числе, почему группа симметрий тетраэдра $\cong S_4$) см. в § 9, Г. 1 из [ВАН].

Еще один пример того, как используется понятие действия. Дает Док-ВА Теорема Силова. Мы знаем, что не для любого делителя k порядка n и конечной группы обязательно найдется подгруппа порядка k . Скажем, в группе A_4 порядка 12, нет подгрупп порядка 6. Однако, оказывается, если k — это степень простого числа, то такая подгруппа всегда найдется. Среди таких подгрупп особенно роль играют самые большие — их называют **силловскими**. Теорема (или даже теоремы) о их существовании была доказана Людвигом Силом в 1872 году.

- Т.2 (Силоз) Пусть $|G| = p^r \cdot l$, где p -простое число и $p \nmid l$.
- ① Существование Для $\forall \alpha \in \{1, \dots, r\}$ в G существует подгруппа порядка p^α .
 - ② Вложение Если $\alpha < r$, то каждая подгруппа порядка p^α из G вложена в некоторую подгруппу порядка $p^{\alpha+1}$.
 - ③ Сопряженность Все подгруппы порядка p^r (они наз-ся **СИЛОВСКИМИ**) группы G сопряжены в G .
 - ④ Количество Количество n_p силовских p -подгрупп в группе G делит $|G|$ и $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.
- Обозн. $P \in \text{Syl}_p(G)$ ozn., что P -силовская p -подгруппа.

Л-во: ① Пусть $\mathcal{M} = \{M \subseteq G \mid |M| = p^\alpha\}$. Имеем
 $|\mathcal{M}| = C_{p^r-1}^{p^\alpha} = p^{r-\alpha} \cdot \prod_{j=1}^{p^\alpha-1} \frac{p^r-1-j}{j}$, поэтому $p^{r-\alpha}$ — это
 наибольшая степень p , делящая $|\mathcal{M}|$.

Группа G действует на \mathcal{M} правыми сдвигами,
 т.к. если $M \in \mathcal{M}$, то $Mg = \{mg \mid m \in M\} \in \mathcal{M}$.

Средь орбит это действие есть хотя бы одна,
 порядок которой делится на $p^{r-\alpha+1}$. Пусть
 $\mathcal{O} = \{M_1, \dots, M_s\}$ — та орбита. Положим $G_i = \{g \in G \mid$
 $M_1 g = M_i\}$, $i=1, \dots, s$. Легко проверить, что $G_1 \leq G$ и
 G_i , $i=1, \dots, s$, — правые смежные классы по подгруппе G_1 .

Мы докажем, что G_1 — простая погр. корт. д. p^α .

Пусть $|G_1| = t$. Тогда $p^r \cdot t = |G| = |\Omega| |G_1| = st$
по т. о группе орбит $(S, \text{действие из т. 9.6.1 из [ВАН]})$.

Так как p — делит s , то $p^r \cdot t = st$ делит t . В частности, $t \geq p^\alpha$. С др. стороны, если $x \in M_1$, то $x G_1 \subseteq M_1$, поэтому $|G_1| \leq |M_1| \leq p^\alpha$.

② Пусть $P \leq G$: $|P| = p^\alpha$ и $\alpha < r$. Обозначим

$\mathcal{P} = \{ p^g \mid g \in G \}$ — класс сопряженных, сопряженных с P в G . Группа G действует на \mathcal{P} сопряжениями, поэтому по т. 9.6.1 из [ВАН] имеем
 $|\mathcal{P}| = |G : N_G(P)|$, где $N_G(P) = \{ g \in G \mid p^g = P \}$ — нормализатор P в G .

Возможны два случая: 1) $p \nmid |P|$. Тогда $p^{d+1} \mid |N_G(P)|$ и, следовательно, в силу первой части т-м в группе $\overline{N} = N_G(P)/P$ есть подгруппа \overline{P}^* порядка $p \Rightarrow \exists e$ прообраз \overline{P}^* имеет порядок p^{d+1} и содержит P .

2) $p \mid |P|$. Рассмотрим действие гр. P на P сопряжениями. Порядки орбит делят $|P|$, т.е. имеют вид $p^{\alpha_i}, \alpha_i \geq 0$. Существует по крайней мере одна орбитальная орбита $\{P\}$. Т.к. $p \mid |P|$, то есть и ещё одна орбитальная орбита $\{Q\}$, $Q \neq P$. С-но, $QP = PQ \Rightarrow PQ \leq G$, причём $|PQ| > |P|$ и $PQ/Q \simeq P/P \cap Q \Rightarrow PQ$ — p -подгруппа, порядок

добавим, чем P , имеем $Q \trianglelefteq PQ$. Т.к. Q и P лежат в одной орбите P , то $\exists g \in G: Q^g = P$. Тогда $P = Q^g \trianglelefteq (PQ)^g = P_1$. Снова, применяя (1), переходим в P_1/P подгруппу P^*/P порядка p , её образ P^* — исконая подгруппа порядка p^{d+1} .

(3) Пусть теперь $P \in \text{Syl}_p(G)$, т.е. $|P| = p^r$, а $P = \{P^g \mid g \in G\}$. Пусть $Q \in \text{Syl}_p(G)$. Надо доказать, что $Q \in P$. P -и Q — сдвиги Q на P сопряженными. Порядки орбит это сдвиги $|Q|$, т.е. равны p^{d_i} , $d_i \geq 0$. Т.к. $|P| = |G : N_G(P)|$ теперь точно не делится на p , то имеется орбита $d \leq r$. Тогда $P'Q = QP' \leq G$ и $P'Q$ — p -группа.

Но $Q \in \text{Syl}_p(G) \Rightarrow |P'Q| = |Q| = |P'| \Rightarrow Q = P'Q = P' \in \mathcal{P}$,
что и требовалось.

(4) В обозн. из (3) $n_p = |P| = |G : N_G(P)| \text{ делит } |G|$.

Чтобы доказать, что $n_p \equiv 1 \pmod{p}$, достаточно
показать, что $|Q|$ — единств. делителю порядка.
Если $|Q'|$ — другая такая орбита, то QQ' — p -подгр.
отличная от Q , что невозможно. \blacksquare

Следствие Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$. Тогда $P \trianglelefteq G \Leftrightarrow n_p = 1$.

Упр 3 Найти все делители порядка в S_4

Упр 4 (Аргумент Фраттини) Если $H \trianglelefteq G$ и $P \in \text{Syl}_p(H)$,
то $G = N_G(P)H$.

Опр 4 Пусть даны гом-зны $\varphi: G \rightarrow S(\Omega)$ и $\varphi': G \rightarrow S(\Omega')$
 заданы группы G и n -бхх Ω и Ω' соответственно.

Эти гом-зны **эквивалентны**, если найдется
 биекция $\chi: \Omega \rightarrow \Omega'$ такая, что $\forall \alpha \in \Omega \quad \forall g \in G$

$$(\alpha(g\varphi))\chi = (\alpha\chi)(g\varphi').$$

Из опр 5 сразу вытекает, что если $\varphi \sim \varphi'$, то
 $\forall \alpha \in \Omega \quad |\alpha(G\varphi)| = |(\alpha\chi)(G\varphi')|$ и hence

$$(G\varphi)_\alpha = (G\varphi')_{(\alpha\chi)}.$$

Пример $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 2$, $\Omega = \Omega' = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$a\varphi = (12)(34) = a\varphi' \quad b\varphi = (13)(24) \quad b\varphi' = (12)$$

Тогда $\varphi \not\sim \varphi'$, т.к. $|1 \cdot G\varphi| = 4$, но $|1 \cdot G\varphi'| = 2$.

Т.3 Пусть ω -гн $\varphi: G \rightarrow S(\Omega)$ ^{транзитивное} действие G на Ω .
 Пусть $\alpha \in \Omega$ и $H = G_\alpha$. Тогда действие φ эквивалентно
 действию G на $\Omega' = G/H$ правыми сдвигами.

Д-во: Т.к. G действ. на Ω транзитивно, то $\forall \beta \in \Omega$
 $\exists x \in G: \beta = \alpha(x\varphi)$. Определим от-е $\chi: \Omega \rightarrow \Omega'$
 правилом $\alpha(x\varphi) \mapsto Hx$. Поскольку $\alpha(x\varphi) = \alpha(y\varphi) \Leftrightarrow$
 $\alpha(x\varphi)(y\varphi)^{-1} = \alpha \Leftrightarrow \alpha(xy^{-1}\varphi) = \alpha \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow Hx = Hy$, от-е χ определено корректно и
 сюръективно. В конце, $\forall x, g \in G$
 $(\alpha(x\varphi) \cdot (g\varphi))\chi = H(xg) = (Hx)g = (\alpha(x\varphi))\chi \cdot g(\varphi) \blacksquare$

Одним из основных понятий теории групп
является понятие полупрямого произведения.

Опр 5 Группы G есть полупрямое произведение

своих подгрупп H и K (обозн: $G = H \ltimes K$),
если 1) $K \trianglelefteq G$, 2) $H \cap K = 1$, 3) $G = HK$.

Зам.1. В д-ве 2-ой т. о том-зах мы видели, что
если $K, H \leq G$ и $K \trianglelefteq G$, то $HK = KH \leq G$.

Зам.2 По 2,3 опр 5 равносильно тому, что
 $\forall g \in G \exists! h \in H$ и $k \in K: g = hk$.

В частности, если $|G| < \infty$ и $G = H \ltimes K$, то $|G| = |H| \cdot |K|$.

Зам.3 Прямое произведение двух подгрупп —
частный случай полупрямого.

Примеры: 1) $S_3 = \langle (12) \rangle \ltimes \langle (123) \rangle$ и вообще,
 $S_n = \langle (12) \rangle \ltimes A_n$.

2) $GL_n(K) = H \ltimes SL_n(K)$, где $H = \{\text{diag}(\lambda, 1, \dots, 1) \mid \lambda \in K^*\}$.

3) $\text{Isom}_2 = O_2 \ltimes \text{Tran}_2$ и $\text{Isom}_3 = O_3 \ltimes \text{Tran}_3$.

Вообще $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = GO(\mathbb{R}^n) \ltimes \text{Tran}(\mathbb{R}^n)$.

НАРЯДУ с „внутренним“ определением \ltimes ,
как и в случае с прямыми произведениями
иногда возникает и „внешнее“ определение.

Напомним (см. пример 6), что группа
 H действует на группе K автоморфизмами,
если задан гомоморфизм $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(K)$.

Теорема 4 Пусть H, K -группы и гомоморфизм $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(K)$ задает действие H на K автоморфизмами.

Мн-во $G = H \ltimes K$ с операцией, заданной правилом

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1^{h_2 \varphi} k_2), \quad (*)$$

где $h_1, h_2 \in H, k_1, k_2 \in K$ и $k_1^{h_2 \varphi}$ — образ k_1 под действием $h_2 \varphi \in \text{Aut}(K)$, образной группы. Причем

$H' = \{(h, 1) \mid h \in H\} \leq G, K' = \{(1, k) \mid k \in K\} \trianglelefteq G,$
 $H' \cap K' = 1$ и $G = H' K'$, т.е. G есть полупрямое произведение своих подгрупп H' и K' (см. опр. 1).

Опр 6 Группа G из опр. 1 наз-ся **полупрямым произведением** гр. H и K (относительно φ) и обозн. $G = H \ltimes_{\varphi} K$ или гр. $H \ltimes K$.

Δ -во: Очевидно, что $(1, 1)$ — нейтр. элемент гр. G .

Т.к. $(1, 1) = (h, k) (h^{-1}, (k^{-1})^{(h^{-1})\varphi})$, то у каждого эл-та из G есть обратный. Проверка ассоциативности сводится к тривиальной прямой выкладке.

Учтв я $H', K' \leq G$, $H' \cap K' = 1$ и $G = H' K'$.

Проверим, что $K' \trianglelefteq G$. Поскольку $G = H' K'$, это вытекает из след. соотнош. $KAB = B$:

$$(h^{-1}, 1) (1, k) (h, 1) = (h^{-1}, k) (h, 1) = (1, k^{h\varphi})$$

Зам. Упомянутый Δ в эту т-му: см. Isaacs, Finite Groups, Theorem 3.2.

Обратно, если G есть полупрямое произведение
 своих подгрупп H и K , причем $K \trianglelefteq G$, то
 $G = H \rtimes_{\psi} K$, где $\psi: H \rightarrow \text{Aut}(K)$ по правилу
 $h \mapsto \psi_h$ и $k\psi_h = h^{-1}kh$, т.е. канонический э-т из H
 отображается в сопряжение э-тов группы K
 (как подгруппы гр. G) этим э-том.

Упр 5 Покажите, что каждая группа G , не
 группа Q_8 нельзя представить в виде
 полупрямого произведения своих подгрупп, т.е.
 собств. норм. подгруппы таковыми не являются.

Т.5 Пусть p и q — простые числа, $p < q$, G — группа
 $|G| = pq$. Тогда $G = P \ltimes Q$ — полупрямое произведение
циклических p -подгруппы P и q -подгруппы Q .

Кроме того, если $q \not\equiv 1 \pmod{p}$, то $G = P \times Q \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ —
циклическая группа, если $q \equiv 1 \pmod{p}$, то
любая $G \cong \mathbb{Z}_{pq}$, и тогда $|P| = q$, $b^{-1}ab = a^r$,
где $P = \langle a \rangle$, $Q = \langle b \rangle$ и $r^p \equiv 1 \pmod{q}$, но
 $r \not\equiv 1 \pmod{q}$, и такая группа, определенная ха-
рактером χ существует.

Д.30: См. например, в п. 11.2 из [KM].