

5. Простые группы

Напомним, что группа G **проста**, если она не содержит нетрив. совств. норм. подгрупп.

Т. 1 (теорема Галюа) При $n \neq 4$ знакопеременная группа A_n проста.

Д-во: При $n = 1, 2, 3$ группа A_n имеет порядок $1, 1$ и 3 соот-но $\Rightarrow G$ проста. При $n = 4$ $1 \neq K_4 \trianglelefteq A_4$. Пусть $n \geq 5$ и $1 \neq K \trianglelefteq A_n$. Д-ем, что $K = A_n$.

В силу п. 2 Т. 3.3.2 достаточно док-ть, что K содержит хотя бы один цикл длины 3. С гр. сопр-ки,

K содержит перм. n -т a . Можно считать, что один из трех вариантов имеет место:

- 1) $a = (1234 \dots)$ — в этом a есть цикл длины > 3 ;
- 2) $a = (123)(45 \dots)$ — в этом a есть цикл длины 3 и еще что-то;
- 3) $a = (12)(34) \dots$ — a — ч-е четного числа незав. транспозиций.

Если $a \in K$, то $[a, b] \in K \quad \forall b \in A_n$. Выводим в первых двух случаях n -т b так:

- 1) $b = (123) \Rightarrow [a, b] = (124)$, что и требовалось.
 - 2) $b = (124) \Rightarrow [a, b] = (12534)$ и 2) сводится к 1).
- Наконец, $(12)(34) = (234)(123) \Rightarrow 3)$ сводится к 2).

Опр 1 Группа $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ называется k -транзитивной,
если для любых попарно разл. $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Omega$ и
попарно разл. $\beta_1, \dots, \beta_k \in \Omega \exists x \in G : \alpha_i^x = \beta_1, \dots, \alpha_k^x = \beta_k$.

Предл. 1 Группа S_n n -кратно транзитивна, а
группа A_n $(n-2)$ -кратно транзитивна $\forall n \geq 3$.

Предл. 2 Группа $\text{PSL}_n(F) \cong \text{SL}_n(F) / Z(\text{SL}_n(F))$, $n \geq 2$,

2-транзитивна как проективная группа, дейст-
вующая на точках соотв. $(n-1)$ -мерного пр-ва.

Д-во: Докажем, что $\text{SL}_n(F)$ действует
2-транзитивно на однородных координатах $V \cong F^n$.

\forall д.в.х. на Γ л.и. н.з.а.в. B -пол. v_1, v_2 и $w_1, w_2 \exists T \in GL_n(F)$:
 $v_i \cdot T = w_i, i=1,2$. Полагая $\tilde{T} = \frac{1}{|T|} T \in SL_n(F)$, имеем
 $v_i \cdot \tilde{T} = w'_i, i=1,2$, где $w'_i = \lambda w_i$. Образ x в $PSL_n(F)$ н.з.н.
 $\tilde{T} \in SL_n(F)$ — невырожденный элемент, переводящий v_i в w'_i
 в Γ — образ v_i в Γ — проекция v_i на Γ — Γ

Теорема 2 (лемма Уэсслера) 2-транзитивная

группа $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ проста, если

- 1) $G = G'$ (G совпадает со своим коммутатором),
- 2) стабилизатор G_α элемента $\alpha \in \Omega$ содержит такую абелеву норм. подгр. A , что $G = \langle A^x \mid x \in G \rangle$.

1-во: Пусть $1 \neq K \trianglelefteq G$. Надо показать, что $K = G$.

а) По-ем, что K транзитивна.

Пусть $\beta \in \alpha^K$. Тогда $\forall x \in G \quad \beta^x = (\alpha^K)^x = \alpha^{xK}$
 \Rightarrow если α, β лежат в одной орбите отн-но K ,
 то и α^K, β^K лежат в одной орбите. Если
 $1 \notin K$ не транзитивна, то $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \Omega: \beta \in \alpha^K, \gamma \notin \alpha^K$.
 Но тогда пару (α, β) не удастся перевести в (α, γ)
 никаким $x \in G$, что contradicts 2-транзитивности группы G .

б) докажем, что $G = G_\alpha K$.

По транзитивности, K транзитивна, поэтому
 $\forall x \in G \exists y \in K: \alpha^x = \alpha^y \Rightarrow xy^{-1} \in G_\alpha \Rightarrow$
 $G = G_\alpha K$.

В) Д-ем, что $G = AK$. В силу того, что $G = \langle A^x | x \in G \rangle$,

каждый $x \in G$ записывается в виде

$$x = a_1^{x_1} \dots a_s^{x_s}, \text{ где } a_i \in A, x_i \in G, i=1..s. (*)$$

Поскольку $A \trianglelefteq G$, в силу б) можно считать, что в ϕ -ле (*) $x_i \in K$. Так как $AK = KA$, то $x \in AK$.

г) Наконец, $G \equiv K$. Действительно, в силу

условия 1) т.н. доказ. и. В) и коммут. соотношения

из п. 4 предл. 3.3.2, имеем $G = [G, G] =$

$$= [AK, AK] \leq K \quad \blacksquare$$

Упр 1* Д-те т. 1 (Тарге) с исп. леммы ШВАБАВН.

Напомним, что $PSL_n(F) = SL_n(F) / Z(SL_n(F))$ — проективная специальная гр. n -й к-ти полей F .

Т.3 (+ на Жордана-Диксона) Для какого-то поля F таково, что $|F| > 3$ группа $PSL_n(F)$ проста.

Д-во: Мы г-ли (см. упр. 3.3.1), что $SL_2(2)$ и $SL_2(3)$ не просты, т.е. $|F| > 3$, $G = PSL_n(F)$ и $\tilde{G} = SL_n(F)$. Мы воспользуемся леммой Уласови, рассматривая действие гр. \tilde{G} на м-ве Ω простых в.и. $V = F^n$ (т.е. G не проектив-ном гр-ве PF^{n-1}). В силу упр. 2 пол-ся, что

группе G действует на Ω 2-транзитивно, и
и требуется в условии 1.2 (лемма Уласова).

Далее в лемме 1.3.2 $\widetilde{G} = [\widetilde{F}, \widetilde{F}] = \widehat{[G, F]}$

$\Rightarrow G = [G, F]$, т.е. условие 1) из леммы

Уласова выполняется. Достаточно показать, что
в стабилизаторе H точки $\omega \in \Omega$, есть абелева
групп. Возьмем из A такую, что $G = \langle A^x \mid x \in G \rangle$.

Пусть ℓ — прямая с направл. вектором $e_n = (0, \dots, 0, 1)$
из F^n . Тогда прообраз \widetilde{H} стаб. H в $SL_n(F)$

состоит из м.г. вида $\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 \dots 0 & * \end{array} \right)$.

Рассм-н гом-зм $\varphi: \tilde{H} \rightarrow GL_{n-1}(F) \times GL_1(F)$, т.е.
 в группу n -го вуг $\left(\begin{array}{c|c} * & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 \dots 0 & * \end{array} \right)$. Он имеет в качестве
 образа подгруппу $\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} E & \begin{smallmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{smallmatrix} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right)$. Имеем $\tilde{A} = \text{Ker } \varphi \trianglelefteq \tilde{H}$

Кроме того, легко проверить, что \tilde{A} абелева.

В силу т. 3.3.3 п. 2 группа $SL_n(F)$ порождается
 всеми n -ми, сопряженными, с трансверсалью
 вуг $t_{in}(d)$, $i=1, n-1$, $d \in F \Rightarrow SL_n(F) =$
 $= \langle \tilde{A}^{\tilde{x}} (\tilde{x} \in SL_n(F)) \rangle$. Образ A подгруппы \tilde{A}
 слова Абел. норм. подгруппы в $G = PSL_n(F)$.

Аналогично, $G = \langle A^x \mid x \in G \rangle$ и все условия леммы Шварца выполняются $\Rightarrow G$ проста. ~~■~~

В случае $F = \mathbb{R}$ все свои бесконечный класс ортогональных групп составляют группы ортогональных n -у (соотв. преобразования, сохраняющие длину векторов). Оказывается, что группа $SO_n = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid |A| = 1 \}$ снова проста при $n \geq 3$, $n \neq 4$. Мы докажем это только в случае трехмерного пр-ва.

Т. 4 Группа SO_3 проста.

Δ -во: см. стр. 431 в [Вин].

Заметим, что результаты наши результаты дают представление о том, как устроены основные классы конечных простых групп, как вытекает из конструктивных теорем о классификации простых групп. Эти результаты можно грубо сформулировать так:

Т.5 (CFSG) Конечная простая гр.б-группа из след:

- 1) группа проста порядка \mathbb{Z}_p
- 2) знакопеременная группа A_n , $n \geq 5$,
- 3) группа лева типа над конечным полем \mathbb{F}_q
(пример: $PSL_n(\mathbb{F}_q)$)
- 4) 26 "маленьких" sporadicических групп.
Самая большая из них моиср $M: |M| \approx 8 \cdot 10^{53}$.