① Коммутативная алгебра

1. Абелевы группы

Напоминания (см. гл. 9 из [ВАМ]): $G = \langle M \rangle$ — группа G порождается своим подмн-вом M.
G конечно порождена (к.п.), если $\exists M : |M| < \infty$.

<u>Опр 1</u> Пусть $\mathcal{K}$ — класс групп. Группа $F = \langle x_i \mid i \in I \rangle$ из $\mathcal{K}$ — свободная группа в классе $\mathcal{K}$ со свободным порождающим мн-вом $\{x_i \mid i \in I\}$, если $\forall\, G \in \mathcal{K}$ с порожд. мн-вом $\{a_i \mid i \in I\}$ от-е $x_i \mapsto a_i$, $i \in I$, индуцирует гомоморфизм из F в G.

Мощность мн-ва I наз-ся **рангом** (или **степенью свободы**) группы F. (Единичная гр — свободная ранга 0)

<u>Зам.</u> Не в каждом классе групп есть свободная. Но в классе абелевых групп имеется очень естественное описание таких групп. Мы ограничимся здесь случаем конечно порожденных абелевых групп.

Далее все группы абелевы, поэтому запись <u>аддитивная</u>.

Напоминание: $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} G_i$ — прямая сумма абелевых групп (см. гл. 9 [ВАМ]).

<u>Опр2</u> Подмн-во $X = \{x_i \mid i \in I\}$ — БАЗА, к.п. абелевой гр. G, если $\forall g \in G$ сущ. единств. представление

$$g = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \ , \text{ где } \alpha_i \in \mathbb{Z}.$$

Зам. Группа $\mathbb{Z}_n$ не обл. базисом!

<u>Т.1</u> Пусть F — к.п. абелева группа. След. утв-я экв-ны

1) F — свободная группа ранга n

2) $F \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n \text{ раз}}$

3) F обладает базисом из n элементов.

<u>Д-во:</u> 2) ⇒ 1) Пусть $G = \langle a_1, \ldots a_n \rangle$ — n-порожд. абелева группа и $F = \langle x_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x_n \rangle \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n \text{ раз}}$

Отобр-е $\varphi: F \to G$, $\sum k_i x_i \to \sum k_i a_i$, — гом-зм $\Rightarrow$ F свободная.

1) $\Rightarrow$ 2) Пусть F' — св. абелева гр. со свобод. порожд. мн-вом $\{x_1', \ldots x_n'\}$. По опр-ю сущ. гом-зм $\psi: F' \to F = \langle x_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x_n \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$, отправл. x_i' в x_i, $i = 1 \ldots n$. По доказанному выше, $\exists \varphi: F \to F'$, — гом-зм, отпр. x_i в x_i'. Тогда $x_i' \psi \varphi = x_i'$ $\forall i = 1 \ldots n$ $\Rightarrow \psi \varphi = id_{F'}$ $\Rightarrow \psi = \varphi^{-1}$ обратим $\Rightarrow$ ψ — изоморфизм.

2) $\Rightarrow$ 3) Базис: $(0, \ldots \underset{i}{1} \ldots 0)$ по всем i.

3) $\Rightarrow$ 2) Если $x_1 \ldots x_n$ — базис, то $\langle x_i \rangle \simeq \mathbb{Z}$ $\forall i = 1 \ldots n$ и $F \simeq \langle x_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x_n \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ ∎

Опр 3 Целочисленные элем. преобр. строк (столбцов) м-цы:

1) прибавление к i-ой строке j-ой, умн. на целое число

2) умножение строки на (-1)

3) перестановка строк

Прямоуг. $(m\times n)$-м-ца $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots d_p)$, где $p=\min\{m,n\}$, диагональна, если $d_{ii}=d_i$ и $d_{ij}=0$ при $i\neq j$. Если дополн. $d_i \mid d_{i+1}$ $\forall i=1\dots p-1$, то D наз-ся нормальной формой Смита.

Т.2 (О нормальной форме Смита для целочисленной м-цы) Любая целочисленная м-ца целочисленными элем. пр-ями строк и столбцов приводится к нормальной форме Смита.

Д-во: См. д-во предл 9.1.1 из [ВИН],

Упр 1 Форма Смита определяется однозначно

см. задачу 9.1.3 из [ВИН].

Числа d_i, $i=1..m$, из формы Смита целочисленной матр наз-ся её инвариантными множителями.

Т. 3 (о свободе) Пусть F – своб. абелева группа ранга n, а H – подгруппа гр. F. Тогда H – своб. группа ранга $m \le n$. Более того, найдутся базисы $x_1 \dots x_n$ группы F и $y_1 \dots y_m$ группы H, для которых $y_i = d_i x_i$, $d_i \mid d_{i+1}$, где d_i $i=1..m$

Д-во: т. 9.1.3 и 9.1.5 из [ВИН] (о группах беск. ранга см. [КМ] §7 и 8.)

Зам. В отличие от В.п. возможно, что $\operatorname{rk} H = \operatorname{rk} F$, но $H \neq F$. Например, $2\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ — группы ранга 1.

Напоминание: если $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s} \in \mathbb{N}$, то

$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}$ См. §9.5 из [ВАМ].

Т.4 Каждая конечно порожд. абелева группа G раскл. в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп, причем набор порядков этих подгрупп определен однозначно.

Опр 4 Этот набор — тип К.п. абелевой группы.

Д-во: См. например Д-во Т. 9.1.6 из [ВАМ].

Пример 1 Разложить в прямую сумму цикл. групп фактор-группу $G = F/H$, где F — своб. абелева гр. с базисом x_1, x_2, x_3, а H — её подгруппа, порожденная эл-ми y_1, y_2, y_3, где

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \\ y_2 = 8x_1 + 9x_2 + x_3 \\ y_3 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Решение: Приведем м-у $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ к норм. форме Смита элем. пр-ями строк и столбцов (см. Т.2). Имеем $A \sim D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Значит, можно выбрать базис x_1, x_2, x_3 в F и порождающие y_1, y_2, y_3 в H так, что $y_1 = x_1$, $y_2 = 4x_2$, $y_3 = 0$. Поэтому

$$G \simeq \langle x_1 + H, x_2 + H, x_3 + H \rangle = \langle x_1 + H \rangle \oplus \langle x_2 + H \rangle \oplus \langle x_3 + H \rangle$$

$$= \langle x_1 + \langle x_1 \rangle \rangle \oplus \langle x_2 \oplus \langle 4x_2 \rangle \rangle \oplus \langle x_3 \rangle \simeq$$

$$\simeq 0 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z} \; \blacksquare$$