3. Конечномерные ассоц. алгебры

Далее A — к.м. ассоц. (не обязат. коммут.!) алгебра над полем F. Иногда на поле F будут налагаться условия ($\operatorname{char} F \nmid \dim A$, $\operatorname{char} F = 0$, F — алг. замк.). В любом случае, все утв-я верны, если $F = \mathbb{C}$.

Напомним, что алгебра A нильпотентна, если любой $a \in A$ нильпотентен, т.е. $\exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0$.

Пример: $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\} \leq M_n(F)$ алгебра (верхних нильтреугольных м-ц) нильпотентна. Более того, произведение любых n эл-тов этой алгебры $= 0$.

Т. 1 Для любой нильпотентной алгебры A $\exists n \in \mathbb{N}$: произведение любых n эл-тов равно нулю.

Зам. Конечномерность существенна!

Обозн.: $B, C \subseteq A \Rightarrow BC = \{bc \mid b \in B, c \in C\}$ и
$B^m = \{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_m \mid b_i \in B\}$. Мы д-ем, что $A^n = 0$.

Д-во: Предп. противное и пусть $B \subset A$ — макс. подпр-во в A, для кот. $\exists n : B^n = 0$. Выберем $a \in A \setminus B$. Т.к. $\exists k \geq 0 : aB^k \not\subseteq B$, но $aB^{k+1} \subseteq B$, то можно взять эл-т $a' \in aB^k \setminus B : a'B \subseteq B$. Заменим a на a'. Т.к. A нильп., то $\exists m \in \mathbb{N} : a^m = 0$. Положим $C = B \oplus \langle a \rangle$. По выбору a имеем $C^{mn} = 0$, что противоречит выбору B ∎

Предл 1 1) Каждая подалгебра и каждая фактор-алгебра нильп. алгебры нильпотентны.

2) Если $I \trianglelefteq A$, то из нильп I и $A/I \Rightarrow A$ нильп.

Упр 1 Д-ть предл. 1

В отличие от комм случая все нильп элт-ты алгебры A не обязаны образовывать идеал (и даже подпр-во!). **Упр 2** Приведите примеры.

Зам. Идеал = двухсторонний идеал.

Предл 2 Если I, J — нильп. идеалы алг. A, то $I+J$ — нильп. идеал A. В частности, сущ. наибольший нильп. идеал алгебры A.

1-во: $J \trianglelefteq I+J$ и $\left.{}^{I+J}\middle/_{J}\right. \cong \left.{}^{I}\middle/_{I\cap J}\right.$ по т-ме о гом-змах. В силу предл. $\Delta \Rightarrow I+J$ нильп. ∎

Опр 1 Наибольший нильп. идеал алгебры A наз-ся её радикалом и обозн. $\mathrm{rad}(A)$.

Опр 2 Алгебра A наз-ся полупростой, если $\mathrm{rad}(A)=0$.

Зам. $A/\mathrm{rad}(A)$ всегда полупроста (возм. нулевая).

Пример 2 Если мн-н $h \in F[x]$, то $A = F[x]/(h)$ полупроста $\Leftrightarrow$ h не имеет кратных неразл. мн-лей.

Мы опишем строение полупростых алгебр (при $\mathrm{char}\, F = 0$) с помощью их представлений!

Пусть $\rho: A \to \mathcal{L}(A)$ — (правое) регулярное представление алгебры A (см. пример 3 из AT18п), т.е. $a(x\rho) = ax$ $\forall a, x \in A$. Определим на A сим. билин. ф-цию, которую будем наз-ть скаляризир-ем (хотя она может быть вырождена!) правилом: $(a, b) = tr((ab)\rho) = tr((a\rho)(b\rho))$ (*1)

<u>Предл 3</u> Если $a, b, c \in A$, то $(ab, c) = (a, bc)$

<u>Упр 3</u> Проверьте, что опред. нами ф-ция $(\,,\,)$ — сим. билин. и д-те предл. 3.

Если $M \subseteq A$, то $M^{\perp} = \{u \in A \mid (m, u) = 0\}$ называем ортогональным дополнением к M.

Предл 4 Если $I \trianglelefteq A$, то $I^{\perp} \trianglelefteq A$.

Д-во: Пусть $x \in I^{\perp}$, $a \in A$, $y \in I$. Тогда $(xa, y) = (x, ay) = 0$ и $(ax, y) = (y, ax) = (ya, x) = 0$ ■

Предл 5 Если char $F = 0$, то каждый $a \in A$, ортогональный всем своим степеням, нильпотентен.

Д-во: Пред. что $\forall n \in \mathbb{N}$ $(a, a^{n}) = tr(a^{n+1}\rho) = 0$.
Пусть K - расш. поля F: хар. мн-н $f(t)$ оператора $a\rho$ разл. на лин. мн-ли: $f(t) = t^{k_0} \prod\limits_{i=1}^{s} (t-\lambda_i)^{k_i}$ ($\lambda_i \neq 0$ и разл.)
Тогда $0 = tr(a^{n+1}\rho) = tr(a\rho)^{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{s} k_i \lambda_i^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (*2)
Пусть n пробегает зн-я $1, \dots, s$. Р-м равенства как систему однор. лин. ур-й отн-но $k_1, \dots, k_s$. Её опр-ль

(т.е. опр-ль м-цы этой системы) лишь мн-лем $\lambda_1^2 \dots \lambda_s^2$ отличается от опр-ля Вандермонда $\Rightarrow$ отличен от 0 $\Rightarrow k_1 = \dots = k_s = 0$ в поле K (исп., что $\operatorname{char} K = 0$) $\Rightarrow S = 0 \Rightarrow$ оператор $a\rho$ нильпотентен $\Rightarrow \exists m : (a\rho)^m = 0$ $\Rightarrow a^{m+1} = a(a\rho)^m = 0$ ∎

T. 2 (критерий полупростоты) 1) Если скал. пр-е $(*1)$ невырожденно, то A полупрост.

2) Если A полупроста и $\operatorname{char} F = 0$, то скал. пр-е $(*1)$ невырождено.

Д-во: 1) Если I - нильп. идеал в A, то $\forall x \in I$ $\forall a \in A$ эл-т $ax \in I$, т.е. нильп. $\Rightarrow (a, x) = \operatorname{tr}(ax)\rho = 0 \Rightarrow$ $I \subseteq A^{\perp} = 0$ в силу невырожд. скал. пр-я $\Rightarrow A$ полупроста.

2) Если скал. пр-е вырождено, то $0 \neq A^\perp$. В силу предл. 4 $A^\perp \trianglelefteq A$. Наконец, $\forall x \in A^\perp$ $(x, x^n) = 0$. Т.к. $\operatorname{char} F = 0$, то предл 5 $\Rightarrow$ $A^\perp$ нильп., противоречие.

<u>Зам</u>. В частности, при $\operatorname{char} F = 0$ мы показали, что $\operatorname{rad}(A) = A^\perp$ — ядро скалярного пр-я.

<u>Пример 3</u> Как уже говорилось в д-ве т-мы Бернсайда (см. АГ 19н), регулярное пр-е ρ алгебры $\mathcal{L}(V)$ изотипно. Более точно, $\rho \simeq \underbrace{\tau \oplus \ldots \oplus \tau}_{n \text{ раз}} = n\tau$, где $n = \dim V$ и $\tau : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$ — тавтологическое представление алгебры $\mathcal{L}(V)$, т.е. тожд. от-е из $\mathcal{L}(V)$ в $\mathcal{L}(V)$.

Сл-но, скалярное пр-е (*1) в $\mathcal{L}(V)$ имеет вид

(*3) $$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = n \operatorname{tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V).$$

Если $\mathcal{E}_{ij}$ — ур-е с м-цей E_{ij} (в фикс. базисе), то

$$\operatorname{tr} \mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{kl} = \begin{cases} 1 & i=l,\ j=k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \xRightarrow[\text{Если } \operatorname{char} F \nmid n]{} L(V)^{\perp} = 0$$

Предл 5 $\Rightarrow$ $L(V)$ полупроста (при $\operatorname{char} F = 0$)..

На самом деле $L(V)$ даже проста, причём незав. от $\operatorname{char} F$.

Опр 3 Алгебра A наз-ся простой, если $A \neq 0$ и A не имеет нетрив. собств. идеалов.

Пример 4 Если поле L — расш. поля F, то алгебра L (над F) проста.

Утв 4 Если L — простая комм. алгебра над полем F, то либо L — расш. поля F, либо $\dim L = 1$ и умножение на L — нулевое.

Предл 6 Если A проста, то A полупроста, за искл. случая, когда A — одномерная алгебра с нул. умн-ем.

Д-во. Т.к пр-е двух идеалов — снова идеал, то $A^2 \trianglelefteq A$.
Если A — нильп, то $A^2 \neq A$ (иначе $A^n = A \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow$ за искл. случая $\dim A = 1$ и $A^2 = 0$ простая алгебра не может быть нильп. $\Rightarrow$ A полупроста ∎

Следствие Алгебра $\mathcal{L}(V)$ проста и, сл-но, полупроста.

Д-во: Достаточно показать, что в $M_n(F)$ нет нетрив. идеалов. Пусть $X = (x_{ij}) \neq 0 \in I \trianglelefteq M_n(F)$. Пред, что $x_{kl} \neq 0$. Тогда $\forall i,j \in \{1..n\}$ имеем

$$E_{ik} X E_{lj} = x_{kl} E_{ij} \in I \Rightarrow E_{ij} \in I \Rightarrow I = M_n(F)$$

∎

Т.3 Каждая полупростая ассоц. алгебра A над полем F хар-ки 0 разлагается в прямую сумму (нетрив) простых алгебр:

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_s, \qquad (*4)$$

причём любой $I \trianglelefteq A$ есть сумма некоторых из A_i из (*4).

Зам. Эта теорема верна и без условия $\operatorname{char} F = 0$!

Д-во: Если A проста, то все доказано $(s = 1)$.

Пусть A не проста и A_1 — её мин. идеал. Если $A_1 \le A_1^{\perp}$, то в силу предл. 5 (здесь исп. $\operatorname{char} F = 0$) A_1 нильпотентен, противоречие $\Rightarrow$ скал. умножение на A невырожд $\Rightarrow$

$$A = A_1 \oplus A_1^{\perp}. \qquad (*5)$$

Разложение (*5) означает, что всякий идеал в A, и $A_1^{\perp}$ — идеал во всей A. Действ-но, если $x \in I \trianglelefteq A_1$ и

$a = a_1 + a_1'$, где $a_1 \in A_1$, $a_1' \in A_1^\perp$, то $(xa_1', a_2') = 0$ $\forall a_2' \in A_1^\perp \Rightarrow xa_1' = 0$ $\forall a_1' \in A_1^\perp$. Поэтому $xa = xa_1' \in I$. (Аналогично для идеала из $A_1^\perp$). Таким образом, A_1 — нетрив. простая алгебра, а $A_1^\perp$ — полупростая, меньшей размерности, чем A. Индукция по разм-сти доказывает существование разложения (*4).

Пусть $I \trianglelefteq A$. Пусть $\pi_k : A \to A_k$ проектирование в (*4) и $I_k = \pi_k(A)$. Очевидно, что $I_k \trianglelefteq A_k$. Т.к. A_k проста, то если $I_k \neq 0$, то $I_k = A_k \Rightarrow A_k = A_k^2 = A_k I_k = A_k I \subseteq I$

Тогда $I = \bigoplus_{k \in J} A_k$, где $k \in J \Leftrightarrow A_k \subseteq I$.

<u>Упр 5</u> а) Если к.м. <u>Коммут.</u> алгебра A полупроста, то

A есть прямая сумма кон. расш. поля F (см. упр. 4);

б) если при этом поле F алг. зам., то $A \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} F$

в) д-те п. б с помощью т. Гильберта о нулях.

<u>Пример 5</u> Пусть $h \in F[x]$ и $h = p_1 \dots p_s$ — разложение h в пр-е неразл. мн-лей, причем $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$.

В силу т. 4 из АТЗп (см. также т. 9.2.5 из [ВИн]) имеем

$$A = F[x]/(h) \simeq F[x]/(p_1) \oplus \dots \oplus F[x]/(p_s)$$

— это есть разложение из п. а) в упр. 5

если $F = \mathbb{C}$, то $A \simeq s\,\mathbb{C}$ (см. пункт б) упр. 5)

если же $F = \mathbb{R}$, то $A \simeq t\,\mathbb{R} \oplus \frac{s-t}{2}\,\mathbb{C}$, где t — число вещ. корней мн-на $h \in F[x]$.

Т. 4 Каждая неприв. простая ассоц. алгебра A над алг. зам. полем F изоморфна алгебре $\mathcal{L}(V)$, где V — в.п. над полем F. Каждое неприв. неприв. пр-е алгебры A эквивалентно тавтологическому представлению алгебры $\mathcal{L}(V)$.

Зам Прив. пр-е $\varphi \Leftrightarrow \dim V = 1$ и $V\varphi = 0$.

Д-во: Пусть $\rho : A \to \mathcal{L}(A)$ — (правое) регул. пр-е для A, V — мин. инв. отн-но ρ подпр-во (т.е. правый идеал в A), и $\varphi : A \to \mathcal{L}(V)$ — ограничение ρ на V, т.е. $v(a\varphi) = v(a\rho)$ $\forall v \in V$ и $\forall a \in A$. Пр-е φ уже неприводимо и по т. Бернсайда (см. АГ 19н) либо $A \simeq A\varphi = \mathcal{L}(V)$, что и треб.

либо $\dim V = 1$ и $A\varphi = 0$. В последнем случае, $0 \neq V \subseteq A_0 = \{x \in A : xa = 0 \ \forall a \in A\}$. Т.к. $\forall y \in A$ $A_0 y \subseteq A$ и $yA_0 \subseteq A$, то $A_0 \trianglelefteq A$. В силу простоты A должно быть $A_0 = A$, но это противор. неприв. алг. A,

Итак, $A = \mathcal{L}(V)$ для некот. в.п. V. Если τ — тавтологическое пр-е алгебры A в пр-ве V, то регул. пр-е $\rho \simeq n\tau$ (см. пример 3). Пусть $\psi : A \to \mathcal{L}(U)$ — произв. неприв. пр-е алг. A. Возьмем $u_0 \in U$ и р.н. от-е $\theta : A \to U$ по правилу $a \mapsto u_0(a\psi)$. Так как $(x(a\rho))\theta = (xa)\theta = u_0(xa)\psi = u_0(x\psi)(a\psi) = (x\theta)(a\psi)$, то θ - морфизм пр-я ρ в пр-е ψ. Если ψ - неприв., то $\operatorname{Im}\psi = U \Rightarrow \psi$ экв. некоторому фактор-представле-

нию пр-ва ρ. Т.к. φ неприводимо, $\varphi \simeq \tau$ (см. следствие из т.1 из АТ13н) ∎

<u>Т.5 (матричная ф-ка)</u> Всякая полупростая ассоц. алгебра A над алг. замк. полем F изоморфна алгебре

(*6) $M_{n_1}(F)\oplus\dots\oplus M_{n_s}(F)$, где

$M_{n_i}(F)$ — полная матричная алгебра разм-сти n_i. В частности, $\dim A = n = n_1^2+\dots+n_s^2$.

<u>Д-во:</u> Вытекает из т. 3 и т. 4 ∎

<u>Опр 4</u> $Z(A)=\{z\in A : za=az \ \forall a\in A\}$ — центр алгебры A.

<u>Следствие 1</u> Если A как в (*6), то $\dim Z(A)=s$.

<u>Д-во:</u> $Z(M_n(F))$ — одномерное пр-во скалярных м-ц ∎

Пусть для $i=1\ldots s$ $\varphi_i : A \to M_{n_i}(F)$ — неприводимое пр-е алг. A, заданное проекцией A на i-ю компоненту разложения (*6).

<u>Следствие 2</u> Каждое нетрив. неприводимое пр.е алгебры A из т. 8 эквивалентно одному из представлений $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$.

<u>Д-во:</u> Если $\varphi : A \to \mathcal{L}(V)$ — нетрив. непр. пр-е, то $\mathcal{L}(V) = A\varphi$ — простая алгебра, то $\operatorname{Ker}\varphi \cong \bigoplus_{k\neq i} M_{n_i}(F)$ и $\operatorname{Im}\varphi \cong M_{n_i}(F)$. По т. 4. φ эквивалентно φ_i ∎