5. Характеры линейных представлений

Пусть $F=\mathbb{C}$ – поле ком. чисел, G – кон. группа

(*1) $\quad \varphi_i : G \to GL(V_i)$, $i=1..s$, – все неприв. пр-я G над $\mathbb{C}$.

Тогда для групповой алгебры имеем

(*2) $\quad \mathbb{C}G = \mathcal{L}(V_1) \oplus \ldots + \mathcal{L}(V_s)$,

причем φ_i – это просто проекция (G или $\mathbb{C}G$) на $\mathcal{L}(V_i)$.

Подпр-ва $\mathcal{L}(V_i)$ – изотипные компоненты рег. пр-я ρ

причем ограничение $\rho_{\mathcal{L}(V_i)} \sim n_i\varphi_i$, где $n_i = \dim V_i$.

Поэтому (см. ф-лу (*3) из примера 3 АТ20н) $\forall a,b \in \mathbb{C}G$

(*3) $$(a,b) = \sum_{i=1}^{s} n_i \operatorname{tr}(a\varphi_i)(b\varphi_i).$$

Обозн: Пусть $\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}^G = \{\theta : G \to \mathbb{C}\}$ — пространство всех ф-ций из G в $\mathbb{C}$, где $(\alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2)(g) = \alpha_1\theta_1(g) + \alpha_2\theta_2(g)$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{C}[G]$ и $g \in G$.

Так как $\theta \in \mathbb{C}[G]$ можно продолжить до лин. ф-ции из $\mathbb{C}G$ по ф-ле $\theta\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g \theta(g)$, то $\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}G^*$ сопряжено пространству $\mathbb{C}G$.

С др. стороны, структура скалярного произведения на $\mathbb{C}G$ определяет его из-зм с $\mathbb{C}G^*$. В частности, $\forall g \in G$

$$g \mapsto \theta_g, \text{ где } \theta_g(h) = (g,h) = \begin{cases} n, & gh = e \\ 0, & gh \neq e, \end{cases}$$

т.е. $\theta_g = n\delta_{g^{-1}}$ (δ-ф-ция в точке g^{-1}).

Перенесем с помощью указ. изом-зма скалярное умн-е из $\mathbb{C}G$ в $\mathbb{C}[G]$. Для δ-ф-ций имеем

$$(\delta_g, \delta_h) = \frac{1}{n^2}(g^{-1}, h^{-1}) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & gh = e \\ 0, & gh \neq e \end{cases}.$$

Поэтому $\forall \theta, \xi \in \mathbb{C}[G]$

$$(*4) \qquad (\theta, \xi) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \theta(g)\, \xi(g^{-1}).$$

<u>Упр 1</u> Поясните ф-лу $(*4)$.

Вычислим теперь скалярные пр-я матричных эл-тов неприв. представлений φ_i, $i = 1..s$, гр. G.

Выберем базисы в V_i, $i = 1..s$, и для $j, k = 1...n_i$ обозн. $\varphi_{ijk} : G \to \mathbb{C}$ ф-цию так, что $\varphi_{ijk}(g)$ – скаляр, стоящий на месте (jk) в м-це операторе $g\varphi_i$.

Ф-ция $\varphi_{ijk} \in \mathbb{C}[G]$ — (j,k)-матричный эл-т пр-ия φ_i гр. G.

Пусть $\mathcal{E}_{ijk}$ — мн. опер. пр-ва V_i такой $[\mathcal{E}_{ijk}] = E_{jk}$ в том же базисе $(i=1..s)$. Ввиду $(*2)$

$\mathcal{E}_{ijk}$, $i=1..s$, $j,k=1..n_i$, — базис $\mathbb{C}G$. Из ф-лы $(*3) \Rightarrow$

$(*5)$ $(\mathcal{E}_{ijk}, \mathcal{E}_{ikj}) = n_i$ и $(\mathcal{E}_{ijk}, \mathcal{E}_{rls}) = 0$ иначе,

В силу $(*5)$ при изоморфизме $\mathbb{C}G$ и $\mathbb{C}[G]$ эл-ту $\mathcal{E}_{ijk}$ соответствует ф-ция $n_i\varphi_{ijk}$. Сл-но,

$(*6)$ $$(\varphi_{ijk}, \varphi_{ikj}) = \frac{1}{n_i} \text{ и } (\varphi_{ijk}, \varphi_{rls}) = 0 \text{ иначе.}$$

Упр 2 Поясните переход от $(*5)$ к $(*6)$.

Теперь все готово к основному опр-ю.

Опр1 Пусть $\varphi: G \to GL(V)$ — мин. пр-е кон. гр. G над $\mathbb{C}$.
Характером пр-я φ наз-ся ф-ция $\chi = \chi_\varphi \in \mathbb{C}[G]$, опр. правилом: $\chi(g) = tr(g\varphi)$ $\forall g \in G$.

Характер наз-ют неприводимым, если φ неприводимо.

ЗАМ. Чтобы выделить характеры комплексных пр-й иногда также говорят о компл. или обыкновенных характерах.

Т_1 (элем. св-ва хар-ров). Пусть $\chi = \chi_\varphi$ — характер пр-я $\varphi: G \to GL(V)$ кон. гр. G над $V/\mathbb{C}$ и $\dim V = n$. Тогда

1) $\chi(g) = \sum\limits_{\lambda \in Sp(g\varphi)} \lambda$ — сумма хар. корней оператора $g\varphi$.

2) Если $\psi \sim \varphi$, то $\chi_\psi = \chi_\varphi$.

3) $\chi(g^h) = \chi(g)$ $\forall g, h \in G$.

4) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ $\forall g \in G$ (черта — компл. сопряжение)

5) если $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$, то $\chi_\varphi = \chi_{\varphi_1} + \chi_{\varphi_2}$.

Д-во: 1) вытекает из опр-я и свойств следа.

Так как $\forall C \in GL(V)$ $tr(C^{-1}AC) = tr(C)$ $\forall A \in \mathcal{L}(V)$, то вып-ся 2) и 3).

Для док-ва 4) заметим, что все $g \in G$ имеют кон. порядок, но из $g^m = e \Rightarrow (g\varphi)^m = \mathcal{E} \Rightarrow$ хар. корни λ_i оператора $(g\varphi)$ — корни m-ой степени из $1 \Rightarrow |\lambda_i| = 1 \Rightarrow \lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$

$\Rightarrow \chi(g^{-1}) = \sum \lambda_i^{-1} = \sum \overline{\lambda_i} = \overline{\sum \lambda_i} = \overline{\chi(g)}$.

Наконец, $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \Rightarrow \forall g \in G \ [g\varphi] = \begin{bmatrix} [g\varphi_1] & 0 \\ 0 & [g\varphi_2] \end{bmatrix}$ в некот. базисе ∎

<u>Опр 2</u> Ф-ция $\theta \in \mathbb{C}[G]$ наз-ся центра́льной, если $\theta(g^h) = \theta(g)$ $\forall g, h \in G$. $Z\mathbb{C}[G] = \{\theta \in \mathbb{C}[G] \mid \theta \text{ центр}\}$.

<u>Т. 2</u> Пусть G - кон. гр., $\varphi_1, \dots \varphi_s$ - все её неприв. пр-я, а $\chi_1, \dots \chi_s$ - их характеры. Тогда

1) $Z\mathbb{C}[G]$ - подпр-во в $\mathbb{C}[G]$

2) $\chi_1, \dots \chi_s$ - ортонорм. базис этого подпр-ва, т.е.

$$(*7) \qquad (\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1 .. s.$$

<u>Д-во:</u> 1) простая проверка

2) вытекает из ф-лы $(*6)$ ∎

Пусть $\varphi: G \to GL(V)$ — произв. (компл.) пр-е кон. гр. G и χ — его характер. Так как φ вполне приводимо (по т. Машке), то $\varphi = \bigoplus_{i=1}^{s} k_i \varphi_i$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ — все неприв. пр-я гр. G. Число k_i, $i = 1..s$, наз-ся **кратностью**, с которой φ_i входит в φ.

<u>Следствие</u> 1) Кратность $k_i = (\chi, \chi_i)$, где χ_i — характер φ_i.

2) φ неприводимо $\Longleftrightarrow (\chi, \chi) = 1$.

<u>Δ-во:</u> Если $\varphi = \bigoplus_{i=1}^{s} k_i \varphi_i$, то $\chi = \sum_{i=1}^{s} k_i \chi_i$ (п.5 т-мы 1)

$\Rightarrow (\chi, \chi_i) = k_i$, что док-ет п.1. Кроме того, $(\chi, \chi) = \sum_{i=1}^{s} k_i^2$

Поэтому $(\chi, \chi) = 1 \Longleftrightarrow$ ровно одна из $k_i = 1$, а ост. $= 0$ ∎

В силу того, что V задано над $\mathbb{C}$, удобно заменить симм. билин. форму на эрмитову полуторалинейную, положив $\forall \theta, \xi \in \mathbb{C}[G]$

$$(*8) \quad (\theta \mid \xi) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \theta(g) \overline{\xi(g)}.$$

<u>Упр 3</u> Проверьте корректность!

Если в каждом V_i выбран ОНБ отн-но $(*8)$, то операторы пр-ий будут записываться <u>унитарными</u> м-цами $\Rightarrow \varphi_{ijk}(g^{-1}) = \overline{\varphi_{ijk}(g)}$ (как в п. 4 т. 1) $\Rightarrow$ ф-лы $(*6)$ означают, что ф-ции φ_{ijk}, $i = 1..s$, $j,k = 1..n_i$, ортогон. базис в $\mathbb{C}[G]$, причем $(\varphi_{ijk} \mid \varphi_{ijk}) = \frac{1}{n_i}$.

Следствие 2 (т-мы 2) Неприводимые характеры $\chi_1 \ldots \chi_s$ гр. G образуют ОНБ в $Z\mathbb{C}[G]$ отн-но $(\cdot|\cdot)$. Это утв-е записанное в явной форме:

$$(*9) \quad \sum_{g\in G} \chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = |G|\,\delta_{ij}$$

наз-ся первым соотношением ортогональности для характеров.

Большое значение для изучения кон. групп и их представлений имеют их таблицы характеров. В такой таблице строки соотв. неприв. хар-рам, а столбцам классы сопряженн. эл-тов группы (таблица получается квадратной по т-ме 2 из АТ2 _и).

Пример 1 Если $G = \langle a \rangle_n$ – цикл. гр. порядка n и ω – прим. корень n-ой ст. из 1, напр. $\omega = e^{2\pi i/n}$, то $s = n$ (гр. G абелева) и гр. G имеет n одномерных пр-ий $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$, опр. условиями $\varphi_i(a^k) = (\omega^{ik}) \Rightarrow$ $\chi_i(a^k) = \omega^{ik}$, $i, k = 0, \dots n-1$. Поэтому таблица (для $n=3$):

	e	a	a^2
χ_0	1	1	1
χ_1	1	ω	ω^2
χ_2	1	ω^2	ω

Соотн-я ортогональности в данном случае фактически превр. в тот факт, что сумма корней n-ой ст. из 1 равна 0.

Упр 4 Составьте табл. характеров для $G = \langle a \rangle_2 \times \langle b \rangle_2$

Пример 2. Составим таблицу характеров группы S_3.

Классы сопр. эл-тов: $C_1=\{e\}$, $C_2=\{(12),(13),(23)\}$, $C_3=\{(123),(132)\}$

Неприв. пр-я (и их хар-ры) φ_1 – трив., $\varphi_1'=\mathrm{sgn}$, φ_2 – двум.

(см. пример 3 из АТ21п). Имеем

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_1'	1	-1	1
χ_2	2	0	-1

Второе соотн-е для характеров:

$$\sum_{i=1}^{s} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} |C_G(g)|, & h = g^x \\ 0, & h \neq g^x \end{cases}.$$

и его приложение здесь.

Упр 5. а) Проверьте на примере табл. характеров г. S_3 справедливость второго соотн-я для хар-ров (см. выше)

б) Найдите кратности неприв. представлений S_3 в его 3-мер. подстановочном пр-ве (см. пример 4 из АТ18п).

Упр 6 Составьте табл. характеров для группы S_4.

След 3. Для конеч. пр-й гр. G $\chi_\varphi = \chi_\psi \Rightarrow \varphi \sim \psi$, т.е. п. 2 т. 1 обратим.

Упр 7 Д-те следствие 3, исп. Т-2 и единственность представления пр-я в виде суммы неприводимых.

Помимо операции сложения представлений (и их характеров) имеются и другие.

Опр 3 Для лин. пр-я $\varphi: G \to GL(V)$ определим сопряженное к нему представление $\varphi^*: G \to GL(V^*)$ по правилу

$$(*10)\ (\alpha(g\varphi^*))(x) = \alpha(x(g\varphi)^{-1}) \quad \forall \alpha \in V^*, \forall x \in V$$

<u>Предл 1</u> а) Определение корректно и имеет место ф-ла
(ж11)
$$[g(\varphi^*)] = [g\varphi]^{-T} = \left([g\varphi]^T\right)^{-1},$$
б) $\chi_{\varphi^*}(g) = \chi_\varphi(g^{-1}) = \overline{\chi_\varphi(g)}$.

<u>Упр 8</u> Д-те предл. 1. $\boxed{\text{Обозн: Если } \chi = \chi_\varphi, \text{ то } \chi' = \chi_{\varphi^*}.}$

Заметим, что $(\text{ф}10) \Rightarrow (\alpha(g\varphi^*))(x(g\varphi)) = \alpha(x)$

Поэтому $\varphi^{**} = \varphi$ (при канон. отожд. $V^{**} = V$).

Если $\varphi^* \sim \varphi$ (это не всегда так!), то φ наз-ся **самосопряженным**.

В примере 1 для $G = \langle a \rangle_n$ $\varphi_0^* \sim \varphi_0$ и $\varphi_k^* \sim \varphi_{n-k}$
при $k = 1, \ldots n-1$.

Пример) $G = S_n$, то $x, y \in S_n$ сопряжены $\Leftrightarrow$ имеют одинаковое цикл. строение $\Rightarrow x$ всегда сопряжен с $x^{-1} \Rightarrow \chi_{\varphi^*}(g) = \chi_\varphi(g^{-1}) = \chi_\varphi(g)$ $\forall g \in G \Rightarrow \varphi^* \sim \varphi$ для любого представления S_n.

Упр 9 Все представления кон. гр. G самосопр $\Leftrightarrow$ каждый элемент из G сопряжен своему обратному

Упр 10 Если φ неприводимо, то φ^* тоже.

Т 3 (второе соотн. ортогон. для характеров) Пусть $\chi_1, \dots \chi_s$ – все неприв. характеры гр G. Тогда $\forall y, z \in G$

$$(\ast 12) \quad \sum_{i=1}^{s} \chi_i(y) \overline{\chi_i(z)} = \begin{cases} |C_G(z)|, & y \text{ и } z \text{ сопряжены в } G \\ 0, & y \text{ и } z \text{ не сопряжены} \end{cases}.$$

__Д-во:__ Сист. предл. 1 и обозн. после него ф-лы (*9), т.е. первое соотношение ортог. принимает вид:

$$(*13) \quad \sum_{g\in G} \chi_i(g)\chi_j'(g) = |G|\delta_{ij}.$$

Пусть $C_1,\dots,C_s$ – все классы сопр. эл-тов в G и $c_1,\dots,c_s$ их размеры. Т.к. зн-е характера не зависит от выбора эл-та из C_i, ф-ла (*13) переписывается так:

$$(*14) \quad \sum_{k=1}^{s} c_k\chi_i(g_k)\chi_j'(g_k) = |G|\delta_{ij}, \text{ где } g_k\in C_k.$$

Пусть $X=(x_{ij})$, $Y=(y_{ij})$ – квадр. $(s\times s)$-м-цы над $\mathbb{C}$, где $x_{ij}=\chi_i(g_j)$ и $y_{ij}=c_i\chi_j'(g_i)$. Тогда в матр. форме

$$(*15) \quad XY=|G|E \iff (*14).$$

В частности, X и Y обратимы, причём $Y^{-1}=\frac{1}{|G|}\cdot X$. Поэтому

(*16) $\underline{Y}X = |G| X^{-1} \cdot X = |G| E$. Перепишем в виде суммы

(*17) $\displaystyle\sum_{k=1}^{s} c_i \chi_k'(g_i) \chi_k(g_j) = |G| \delta_{ij}$

В силу рав-ва $|G| = |C_G(g_i)|\,|g_i^G|$ (лемма об орбитах действия)

(*18) $\displaystyle\sum_{k=1}^{s} \chi_k(g_j) \overline{\chi_k(g_i)} = |C_G(g_i)| \delta_{ij}$

Обозначая $y = g_j$ и $z = g_i$, получаем требуемое ∎

Следствие 1 Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ — все неприв. пр-я гр. G, $n_1, \ldots, n_s$ их степени, $\chi_1, \ldots, \chi_s$ — характеры, то

$$\sum_{i=1}^{s} n_i \chi_i(g) = \begin{cases} |G|, & g = 1 \\ 0, & g \neq 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{при } g = 1 \Rightarrow (*3) \text{ из т2 в АN-84.}}$

Д-во: Заметим, что $\chi_i(1) = n_i$ и $C_G(1) = G$.

Следствие 2 Эл-ты g и h сопряжены в G $\iff$ $\chi_i(g)=\chi_i(h)$ $\forall i=1\ldots s$, где $\chi_1\ldots\chi_s$ — все непр. хар-ры гр. G

$\boxed{\text{Упр. 11 Д-ть След. 2}}$

Опр 4 Произведением (иногда добавляют тензорным) представлений $\varphi: G\to GL(V)$ и $\psi: G\to GL(W)$ наз-ся мн. пр-е $\varphi\cdot\psi: G\to GL(V\otimes W)$, $g\mapsto g\varphi\otimes g\psi$.

Зам. Не путать с тенз. пр-ем $\varphi\otimes\psi: G\times H\to GL(V\otimes W)$
$(g,h)\to g\varphi\otimes h\psi$.

Известная ф-ла из тензорной алгебры

$$\operatorname{tr}(A\otimes B)=\operatorname{tr}A\cdot\operatorname{tr}B$$ (см. напр., Упр 6 из AN-87)

$\Rightarrow \chi_{\varphi\psi}=\chi_\varphi\cdot\chi_\psi$. Это позволяет находить разложение произведений представлений в сумму неприводимых (одна из наиболее частых задач теории представлений).

Пример 4 Разложим в сумму неприводимых квадрат 2-мерн. неприв. пр-я гр. $G = S_3$, используя табл. хар. из пр. 2 и (*8).

Пусть χ – соотв. хар-р. Тогда $\psi = \chi_2^2$ и соотв. кратности равны

$$k_1 = (\chi, \chi_1) = (\chi | \chi_1) = (\chi_2^2 | \chi_1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_2^2(g) \overline{\chi_1(g)} = \frac{1}{6}(2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)^2 \cdot 1) = 1$$

$$k_1' = (\chi, \chi_1') = \frac{1}{6}(2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot (-1) + 2(-1)^2 \cdot 1) = 1 \quad k_2 = (\chi, \chi_2) = \frac{1}{6}(2^2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 2(-1) \cdot 1) = 1$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_1' \oplus \varphi_2 .$$

По аналогии с определением 2 представлений можно дать опр-е произведения нескольких пр-й, симметр. и внешнюю степени пр-я и т.п. Скажем,

$$\Lambda^2 \varphi : G \to GL(\Lambda^2 V), \quad g \mapsto \Lambda^2 (g\varphi).$$

Заметим также, что $\mathbb{Z}\mathbb{C}[G]$ – алгебра отн-но умножения, опред. в 4.