2. Идеалы и гомоморфизмы колец

Пусть R – кольцо и I – подгруппа в R^+, т.е. в аддитивной подгруппе кольца R. Будем говорить, что $x \equiv y \pmod I$ для $x, y \in R$, если $x - y \in I$. Напомним, что I наз-ся левым (правым) идеалом кольца R, если $x \equiv 0 (I) \Rightarrow ax \equiv 0 (I)$ ($\Rightarrow xa \equiv 0 (I)$) $\forall a \in R$. Говорят, что I – идеал (двусторонний), если I и правый, и левый идеал.

Отношение $\equiv (I)$ согласовано с умножением в R, т.е. $a \equiv a' (I)$ и $b \equiv b' (I) \Rightarrow ab \equiv a'b' (I) \iff I$ – идеал в R.

В этом случае на фактор-группе R/I опр-ся умн-е по правилу $(a+I)(b+I) = ab + I$ и R/I – кольцо отн-но

этой операции. Оно наз-ся фактор-кольцом R/I.

<u>Предл 1</u> Если R – ассоц., комм. или обл. единицей, то и R/I обл. соотв. свойством.

<u>Обозн</u> $I \trianglelefteq R$ (I – идеал в R).

<u>Примеры</u> 1. $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ – кольцо вычетов по модулю n.

2. F – поле и $I \trianglelefteq F \Rightarrow I = 0$ или $I = F$.

<u>Опр 1</u> Пусть A и B – кольца (алгебры над полем F) отоб-е $\varphi : A \to B$ – гомоморфизм колец (алгебр), если

$$(x+y)\varphi = x\varphi + y\varphi \quad (xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi) \quad \forall x, y \in A$$

(и для алгебр $(\alpha x)\varphi = \alpha(x\varphi)$ $\forall \alpha \in K$ и $\forall x \in A$).

Из опр-я идеала $\Rightarrow$ Если $I \trianglelefteq A$, то от-е

$\pi: A \to A/I$ по правилу $a\pi = a+I$ — гом-зм,

он (как и в случае групп) наз-ся **канонический**.

<u>Т. 1 (о гом-зме)</u> Пусть $\varphi: A \to B$ — гом-зм колец.

Тогда 1) $\operatorname{Im}\varphi = \{a\varphi \mid a \in A\} \leq B$ (подкольцо в B)

2) $\operatorname{Ker}\varphi = \{a \in A \mid a\varphi = 0\} \trianglelefteq A$ (идеал в A)

3) От-е $\psi: A/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ по правилу

$(a+\operatorname{Ker}\varphi)\psi = a\varphi$ — изоморфизм.

<u>Д-во:</u> См. Т. 1 в § 9.2 из [ВИН].

Пример $A = K[x]$, $B = K$ и c — фикс. эл-т из K.

Отоб-е $\varphi : A \to B$ по правилу $f(x) \xmapsto{\varphi} f(c)$ — гом-зм

$\operatorname{Im}\varphi = K$, $\operatorname{Ker}\varphi = (x-c)K[x]$ — все мн-ны, делящиеся на $x-c$. Поэтому $K[x]/_{\operatorname{Ker}\varphi} \simeq K$.

(сравни с теоремой Безу). Другие примеры см. [ВИИ] после т. 9.2.1.

Чтобы опр-ть факторалгебру $A/_I$ алгебры A от идеала I доп. требуется, чтобы $\alpha I \subseteq I$ $\forall \alpha \in K$.

Зам Если $1 \in A$, то I — идеал алг. $A \Leftrightarrow I$ — идеал кольца A.

Опр-е гомоморфизма и теорема о гом-змах легко распространяется на алгебры.

Опр 2 Кольцо (алгебра) A расскл. в прямую сумму своих подколец (подалгебр) $A_1, \dots, A_k$, если

1) абелева группа A — прямая сумма аб. групп $A_1 \dots A_k$ (в.п. A есть прямая сумма подпр-в $A_1 \dots A_k$ в случае алгебр)

2) $A_i \cdot A_j = 0$ при $i \neq j$ (что равносильно тому, что $A_1, \dots, A_k$ — идеалы).

Опр 2' (внешнее) Прямая сумма колец (алгебр) $A_1, \dots, A_k$ — это прямая сумма $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ их аддитивных групп (в.п. в случае алгебр) с покомпонентной операцией умножения:

$(x_1, \dots, x_k)(y_1, \dots, y_k) = (x_1 y_1, \dots, x_k y_k)$.

Предл 2 Опр-я 2 и 2' экв-ны в том смысле, что

$A \simeq A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, где A из опр 2.

Д-во: также как и в случае групп...

Предл 3 Если $A_1, \ldots A_k$ а) ассоц, б) комм, в) с единицей, то и $A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ тоже.

Упр 1 Если $A_1, \ldots A_k$ без делит. нуля, верно ли это для $A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$?

Упр 2 Док-ть, что $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l \Longleftrightarrow (k, l) = 1$ и $n = kl$.

Далее, A – комм. ассоц. кольцо с 1.

<u>Предл 4</u> Пусть $S \subseteq A$. Мн-во $(S) =$
$= \{a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m \mid x_1, \ldots, x_m \in S, a_1 \ldots a_m \in A\} \trianglelefteq A$,
при этом (S) – наим. идеал, содержащий S.

<u>Опр 3</u> $I = (S)$ – идеал, порожденный мн-вом S.

<u>Упр 3</u> Док-ть предл. 4

<u>Опр 4</u> Идеал (x), порожденный одним эл-том x кольца A наз-ся ГЛАВНЫМ.

Предл 5 A — поле $\Leftrightarrow$ в A нет нетрив. собств. идеалов

Д-во: Пусть $0 \neq x \in A$. $\Rightarrow$) Если A — поле, то $(x) = A$.

$\Leftarrow$) Если $(x) = A$, то $1 \in (x) \Rightarrow \exists y \in A : xy = 1 \Rightarrow A$ — поле.

Опр 5 Идеал I кольца A наз-ся *максимальным*, если $\forall J \trianglelefteq A : I \subseteq J$ либо $I = J$, либо $J = A$.

Предл 6 $I \trianglelefteq A$ максимален $\Leftrightarrow$ A/I — поле

Д-во: I — макс. $\Leftrightarrow$ A/I нет нетрив. собств. идеалов

Потому предл 6 есть следствие предл. 5 $\blacksquare$