

4. Модули над коммутационными кольцами

Опр 1 Пусть A - ассоц. кольцо с 1.

(Правым) **модулем над кольцом A** (A -модулем)

называется абелева группа M с операцией умножения (справа) на элементы кольца A со след. свойствами:

$$1) (x+y)a = xa + ya \quad \forall x, y \in M \quad \forall a \in A$$

$$2) x(a+b) = xa + xb \quad \forall x \in M \quad \forall a, b \in A$$

$$3) x(ab) = (xa)b \quad \forall x \in M \quad \forall a, b \in A$$

$$4) x1 = x \quad \forall x \in M \quad (1 - \text{единица кольца } A).$$

Аналогично определяется **левый A -модуль**, в этом случае используется умножение ax — x из A слева

В случае, когда A — коммутативно, различия нет. Левый и правый модули не.

Примеры 1) Аддитивная группа в.п. V над полем F — F -модуль (левый и правый)

2) Любая абелева группа \mathbb{Z} -модуль

3) Кольцо A (точнее его аддитивная группа) — модуль над самим собой, называемый **регулярным**.

4) Аддитивная группа в.п. V — модуль над кольцом $L(V)$ — всех л.п. и пр. в V .

5) Если M - абелева группа, то $\text{ли-во } A = \text{End}(M) = \text{Hom}(M, M)$ всех **эндоморфизмов**, т.е. ли-во из M в M образует кольцо (ассоц. и с 1) относительно операции сложения $\chi(\varphi + \psi) = \chi\varphi + \chi\psi$ и композиции $\chi(\varphi\psi) = (\chi\varphi)\psi$. Легко проверить, что M - A -модуль.

6) Пусть $F[t]$ - кольцо ли-во от одной переменной над полем t , V - в.ч. над полем F , $\varphi \in L(V)$. Положим $\chi f(t) = \chi f(\varphi)$, т.е. в частности $\chi \cdot t = \chi\varphi$. Тогда аддитивная группа V - это $F[t]$ -модуль.

Обратно, если M -некоторый $F[t]$ -модуль, то всякую определённую модуля M -в.и. над F (рассмотрите умножение на скаляра), пр-е пр-ва $M \quad x \mapsto xt, x \in M$, явл-ся линейным, т.е. к-л-ся $F[t]$ -модуль-ю в.и. над F с фикс. линейным оператором, играющим роль умножения на t .

Изучение модулей над кольцом A очень полезно, в частности, для изучения свойств кольца A , как изучение разл. действий групп G на разл. мн-вах Σ , сравн с опр. 9.6. [Л.В. [ВЛМ]]

Опр 2 Подмодуль N модуля M над кольцом A называется **подмодулем**, если N — подгруппа в M , замкнутая относительно умножения на элементы кольца A .

Предл 1 Подмодуль A -модуля — сам A -модуль.

В вышеприв. примерах: 1) подмодуль = подмодуль 2) подмодуль = подгруппа 3) подмодуль = идеал 6) Если $\varphi \in \mathcal{L}(V)$: $x \mapsto x\varphi$, то подмодуль = φ -инв. подмодуль.

Зад 1 Доказать, что в примере 4 0 и V — единств. подмодули.

Верно ли аналогичное утверждение в примере 5?

Модуль с этим действием называется **простоим** (или **линейным**).

Предл 2 Если N — нормальная A -подгруппа M , то

$(x + N)a = x\alpha_i + N \quad \forall x \in M, a \in A$. В частности, факторгруппа M/N явл-ся A -модулем.

Опр 3 Модуль M/N — **фактормодуль** модуля M по нормальной N .

Опр 4 Если M, N — модули из кольца A . От-е

$\varphi: M \rightarrow N$ — **гомо-ом (гомоморфизм)**, если

$$(x + y)\varphi = x\varphi + y\varphi \quad \text{и} \quad (xa)\varphi = (x\varphi)a \quad \forall x, y \in M, \forall a \in A.$$

Если N — нормальная в M , то $\pi: M \rightarrow M/N, x \mapsto x + N$ — канонический гом-ом.

Т. 1 (о том-же модуле) Ф-ка имеет на отл.
от ф-к для колец (см. также т. 9.3.1 из [Вик]).

Опр 5 Пусть M — A -модуль, $S \subseteq M$. МН-во
 $\langle S \rangle = \{ x_1 a_1 + \dots + x_s a_s, x_i \in S, a_i \in A, s \in \mathbb{N} \}$
называется наим. подмодулем в M , сод. S , и наз-ся
подмодулем, **порожденным** МН-вом S .
Если $\langle S \rangle = M$, то M **порождается** МН-вом S , а
 S — **система порождающих** модуля M . Модуль,
имеющий конечную систему порождающих, наз-ся
конечно порождаемым. Модуль, порожд. одним
элементом, наз-ся **циклическим**.

Препр 3 Подмодуль-во $\text{Ann } M = \{a \in A : Ma = 0\} \trianglelefteq A$.

Опр 6 $\text{Ann } M$ — **аннулятор** модуля M (в кольце A).

Если $\text{Ann } M \neq 0$, то M — **периодический** модуль.

Пример НОК порядков m -го в группы (если он есть) называется **экспонентой** (или **периодом**).

Если M — адельеве группа, рассм. как \mathbb{Z} -модуль, то $\text{Ann } M = (n\mathbb{Z})$, где n — **экспонента** M .

Т. 2 Канонич. сужа. (справедл.) A -модуль изоморфен модулю вида A/I , где I — (справедл.) идеал кольца A . Если A коммутативно, то $I = \text{Ann } M$ и тем самым определен модулем M однозначно.

Лемма 1 Пусть $M = \langle x \rangle$. Тогда экв-е $\varphi: A \rightarrow M, a \mapsto xa$,
— гом-зм A -модулей, причём $\text{Im } \varphi = M$.


В силу л. 1 $A/I \cong M$, где $I = \text{Ker } \varphi$.

Пусть A — комм. Тогда M — циклический, т.е. $\forall y \in M \exists b \in A$:

$$y = xb. \text{ Если } a \in I = \text{Ker } \varphi, \text{ то } ya = (xb)a = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{комм. с } b}}{(xa)b} = 0 \cdot b = 0. \quad \square$$

Опр 2 Система $\{x_1, \dots, x_n\}$ A -модуля M
наз-ся линеарно независимой, если $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0$
 $\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0 \quad \forall a_1, \dots, a_n \in A$. Если эта система
поронедает M , то она наз-ся **базисом** модуля M .
Комм. модуль M наз-ся **свободным**, если он обладает базисом.

Предл 4 Свободный уикл. A - могут изолироваться A .


Δ -во: Применить Т-му 2 

Всюду далее A - кольцо главных идеалов.

Заметим, что кольца в примерах 1), 2), 6) - кольца главных идеалов. (и даже евкл. кольца)

Т. 3 Все базисы свободного A -модуля L содержат одно и то же число эл-тов (они наз-ся **рангом** и обозн. $rk L$).

Δ -во: Если p - простой эл-т кольца A , то $F = A/(p)$ - поле по Т. 3 из § 3, $A/pA \cong A/pA$ - в.ч. над F . Если

e_1, \dots, e_n - базис L , то $e_1 + pA, \dots, e_n + pA$ - базис в.ч. $V \Rightarrow$
 $n = \dim V$ и не зависит от выбора базиса 

Т. 4 Если N -подмодуль своб. A -модуля L ранга n , то N -своб. модуль ранга $m \leq n$, причем существуют базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ модуля L и такие ненулевые эл-ты u_1, \dots, u_m кольца A , что $\{e_1 u_1, \dots, e_m u_m\}$ - базис N и $u_i \mid u_{i+1}$ при $i=1, \dots, m-1$.

Δ -во. см. Δ -во Т. 9.3.4 из [ВАН],

изучим теперь свойства к.п. A -модулей.

Опр 8 К.п. A -модуль M наз-ся **примарным** (или **p -примарным**), если найдется такой простой эл-т $p \in A$, что $p^k \in \text{Ann } M$ для некот. $k \in \mathbb{N}$.

Т.к. A — коммут. кольцо, то по Т. 2 каждый цикл A -модуль M изоморфен либо A , либо $A/(n)$ где n — необр. ненуль. эл-т кольца A , эл-т n имеет единств. разложение $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ в произведение простых (с точностью до обр. эл-та) В силу Т. 4 из § 3 имеет $A/(n) \cong A/(p_1^{k_1}) \oplus \dots \oplus A/(p_s^{k_s})$

⇒ Предл. 5 Первос. циклич. модуль есть прямая сумма простых циклич. модулей и порождается единицей с точностью до перест. слагаемых.

Т. 5 Каждый конечно порожд. A -модуль M разлагается в прямую сумму простых и свободных циклических модулей, причем набор annihilаторов этих

могут быть определены однозначно.

Л-ВО: канонично гом-изм. т. о. к. и. абелевых групп. Используя т. 4, имеем

$$M \cong L/N \cong A/(u_1) \oplus \oplus A/(u_m) \oplus \underbrace{A \oplus \dots \oplus A}_{n-m} \quad (*)$$

где $u_i | u_{i+1}$ $i = 1 \dots m-1$, причем число m

и u_1, \dots, u_m определены однозначно в силу леммы о приведении м-чк к к.н.н. виду (из любого т.п. изобраз). Осталось принять предп. 5 ~~11~~.

ЗАД 2 Записать полное гом-во.

Как уже говорилось, n -ты u_1, \dots, u_n из кольца A ($\text{см } *$)
определяется (с точностью до ассоциированности,
т.е. умножения на обр. n -ты) n -модулю M
однозначно. Они наз-ся **инвариантами**
модуля M . При этом у
последних из них есть простой смысл.

Предл 6 Если M — периодический, то $(u_n) = \text{Ann } M$.

Следствие Экспонента конечной абелевой группы G
равна её последней инв. n -лю u_n (здесь G
— \mathbb{Z} -модуль). Кон. абелева группа циклическая \Leftrightarrow
её порядок и экспонента совпадают.

Задача 3 Δ -те следствие.

Т.6 Любая конечная подгруппа мультипликативной группы поля (в частности, мультипликативная группа любого конечного поля) является циклической.

Д-во: Пусть экспонента подг. G в F^* равна m .

Тогда $g^m = 1 \quad \forall g \in G$. Ур-е $x^m = 1$ имеет не более m решений в поле $F \Rightarrow |G| \leq m$
 $\Rightarrow |G| = m$. По следствию G - циклическая.

Посмотрим теперь, что развоятся из нас. Теория означает для примера G из начала изоморфизма.

Пусть φ — л.н. к.м. в.н. V над полем F . Тогда
 $A = F[t]$. Рассмотрим V как A -модуль, порождая
 $x \cdot t = x\varphi \quad \forall x \in V$, откуда $x f(t) = x f(\varphi) \quad \forall f \in A$.
 Т.к. $\dim V = n < \infty$, то V — к.ч. модуль. Применим
 к нему л. 5. Заметим, что в разложении (*)
 не может быть свобод. цикл. модулей, т.е. $m=n$,
 т.к. $A = F[t]$ имеет беск. размерности над F .
 Предположим, что F алг. замкнута. Тогда
 простые π - π в A — это линейные мн.-чл.
 вида \Rightarrow M — прямая сумма примарных
 цикл. модулей вида $\bar{W} = A/(u)$, где $u = (t-\lambda)^m$, $\lambda \in F$.

Модуль W — m -мерное векторное \mathbb{C} -векторное пространство F
с базисом $\{1 + (u), (t - \lambda) + (u), \dots, (t - \lambda)^{m-1} + (u)\}$

Относно указанного базиса $t - \lambda$ — это матрица — скаляр!

Поэтому в этом базисе умножение на t
(т.е. действие оператора φ) записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \text{ т.е. матрица Жордана,}$$

Таким образом, T -матрица в жордановой форме
(и её единственность с точностью до перестановки
несвязных клеток) есть прямое сложение T -матриц J .

Посмотреть также на представление (*) в этом случае $V \cong A/(u_1) \oplus \dots \oplus A/(u_n)$ (здесь $n=m$!).

Поскольку $(u_n) = \text{Ann}(V) = (g(t))$, где $g(t)$ — нек. мн-н такой, что $tg(t) = 0 \quad \forall x \in V$, то $u_n = g(t)$ — нек. аннул. лев-н. Причем, этот факт не зависит от того два-ся ли поле F алгебр. Замкнутом или нет. В частности, это дает уточнение т-мы о нек. аннул. много-члене (см. т. 6.7.1 из [ВЛМ]).

Зад 4. Покажите, что харак. лев-н $f_0(t)$ — нек.
пр-я φ — это $\prod_{i=1}^n u_i$.

Пример. Пусть V -в.н. к-во \mathbb{C} , $\dim V = 2$ и $\varphi \in \mathcal{L}(V)$;

$[\varphi] = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ в нек-ой базисе. Найти ж.ф. T и мин. анн. многочлен, и доказать T -му 5.

Т.к. $\chi A = \chi \cdot \delta$, то $\chi(A - \delta E) = 0$. Приведем многоч $A - \delta E \in M_2(\mathbb{C}[t])$ к норм. форме Смита:

$$\begin{pmatrix} 3-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t-3 \\ 1-t & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t-3 \\ 0 & (t-3)(t-1)+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (t-2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$$

Получены 2-хар. корень кратности 2 гл.д. φ и мин. анн. мн-н $g(t) = u_2 = (t-2)^2 \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.