5. Нётеровы кольца

Всюду в этом параграфе A – комм. асс. кольцо с 1.
$+$ $B \leq A \Rightarrow 1 \in B$ и $\varphi: A \to B$ $1\varphi = 1$ в B.

Предл 1 След. утв-я экв-ны:

(1) Каждый идеал I кольца A конечно порожден;

(2) не сущ. бесконечной строго возр. цепочки идеалов $I_1 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$ $(I_n \neq I_{n+1})$ кольца A.

Д-во: $(1 \Rightarrow 2)$ $I = \bigcup\limits^{\infty} I_n \trianglelefteq A \Rightarrow I = (x_1, \ldots x_m)$.
$\Rightarrow \forall i = 1 \ldots m$ $\exists k_i$: $x_i \in I_{k_i}$. Если $N = \max k_i \Rightarrow$
$I \subseteq I_N \Rightarrow I_N = I_{N+1} \Rightarrow$ цепочка идеалов не бесконечна

$(2 \Rightarrow 1)$ Если $\exists I \trianglelefteq A$: I не порожд. кон. числом эл-тов, то $\exists$ беск. посл-ть $x_1, x_2, \ldots \in I$: $(x_1) \neq (x_1, x_2) \neq \ldots$ ▭

Опр 1 Кольцо A наз-ся нётеровым, если оно удовл любому из двух условий в предл. 1.

Предл 2 Если A нетерово, $I \trianglelefteq A$, то A/I нетерово

Д-во: Прообраз J идеала $\overline{J}$ кольца $\overline{A} = A/I$ — идеал кольца A. Т.к. A нетерово, то $J = \langle x_1 \ldots x_n \rangle$
$\Rightarrow \overline{J} = (\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_n)$, где $\overline{x}_i = x_i + I$ — образы эл-тов $x_1 \ldots x_n$ при канон. гом-зме из A в A/I $\blacksquare$

Т.1 Пусть M — к.п. модуль над нетеровым кольцом A. Если N — подмодуль модуля M, то N конечно порожд.

Д-во: Если M — своб. ушка (т.е $M = A$), то утв-е теоремы совпадает с опр (1) нётерова кольца.

Пусть $M = \langle x_1, \dots x_n \rangle$. Индукция по n.

При $n=1$ из Т. 3.2 $\Rightarrow$ $M = A/I$, где $I \trianglelefteq A$.

Тогда $N \trianglelefteq A/I$ и теорема вытекает из предл. 2.

Пусть $n > 1$ и $M_1 = \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$, $N_1 = N \cap M_1$.

По предп. индукции $N_1 = \langle y_1, \dots y_k \rangle$ — к. п. Фактор-модуль $N/N_1 \leq M/M_1 = \langle x_n + M_1 \rangle$ - цикл. $\Rightarrow$

$N/N_1 = \langle z_1 + N_1, \dots z_\ell + N \rangle$ - к. п. в силу доказанного.

Тогда $N = \langle y_1, \dots y_k, z_1, \dots z_\ell \rangle$ тоже к. п. ∎

Следующая теорема носит название

Т-ма Гильберта о базисе и была доказана

(в формулировке, которую мы увидим позже)

Отметим также, что её док-во неконструктивно. О способах его конструктивизации мы поговорим в след. лекциях.

Т. 2 (Гильберта о базисе идеала). Если A нётерово, то $A[x]$ тоже нётерово.

Д-во: Пусть $I \trianglelefteq A[x]$. Мн-во $A[x]_n$ мн-нов из $A[x]$ степени не выше n — это своб. A-модуль с базисом $\{1, x, \ldots x^n\}$. Положим $I_n = I \cap A_n$.

В силу т. 1 $\forall n \in \mathbb{N}$ I_n — к.п. A-модуль.

Очевидно, что $I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$.

Пусть $J_n = \{a_n \in A \mid f(x) = a_n x^n + \ldots \in I_n\}$. Легко проверить, что $J_n \subseteq J_{n+1}$ и $J_n \trianglelefteq A$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Т.к. A нетерово $\exists m \in \mathbb{N}$: $J_n = J_m$ $\forall n \geqslant m$.
Поэтому $\forall f \in I_n$ $(n \geqslant m)$ $\exists g \in I_m$: $f - x^{n-m} g \in J_{n-1}$
Сл-но, $J = \langle I_m \rangle$ (как идеал кольца $A[x]$).
Но I_m порождается некоторыми мн-нами $f_1, \dots f_k$
как A-модуль $\Rightarrow$ J порождается этими мн-ми
гля многочленами как $A[x]$-модуль, т.е как
идеал кольца $A[x]$ ∎

<u>Следствие 1</u> Если A нётерово, то $A[x_1, \dots x_n]$
тоже $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Зам</u> Таким образом, хотя $F[x_1, \dots x_n]$ при $n > 1$
уже не явл-ся кольцом гл. идеалов, но оно будет
по крайней мере нётеровым!

Пусть A — подкольцо кольца B. Говорят, что B **порождается** эл-ми $u_1, \ldots u_n \in B$ **над** A, если каждый b из B можно записать как мн-н от $u_1, \ldots u_n$ с коэф-ми из A, иными словами, $\exists$ эпиморфизм $f : A[x_1 \ldots x_n] \xrightarrow{\text{на}} B$, где $x_i \to u_i$.

В силу т. о гом. змах $B \cong A[x_1 \ldots x_n] / \operatorname{Ker} f$.

Обозн: $B = A[u_1 \ldots u_n]$ (это <u>не</u> значит, что $u_1, \ldots u_n$ независимы!)

<u>Следствие 2</u> Кольцо конечно порожденное над нетеровым кольцом само нетерово.

Δ-во: применить След. 1 и Предл. 2 $\blacksquare$

Эл-т a кольца A наз-ся **нильпотентным**, если $a^m = 0$ для некот. $m \in \mathbb{N}$.

<u>Предл 3</u> $\operatorname{rad}(A) = \{a \in A \mid a \text{ нильп.}\} \trianglelefteq A$.

<u>Опр 2</u> $\operatorname{rad}(A)$ – **нильпотентный радикал** кольца A

<u>Зам</u> Иногда говорят просто радикал, но бывают и <u>другие</u>!

<u>Опр 3</u> Идеал I кольца A наз-ся **простым**, если $I \neq A$ и A/I не имеет делителей нуля.

<u>Пример</u> Если A – PID, то $I = (n)$ – простой $\Longleftrightarrow$ n – простой эл-т.

Напомним (см. опр 2.5 из файла АТ2ч), что идеал I максимален, если $I \neq A$ и $I = J$ $\forall$ идеала J кольца A: $I \subseteq J$, причём в силу предл. 2.5 из того же АТ2ч:

$$I \text{ макс в } A \Leftrightarrow A/I \text{ - поле.}$$

<u>Предл 4</u> Если I - макс. идеал в A, то I - простой.

<u>Д-во:</u> В поле нет делителей нуля!

<u>Т.3</u> Нильпотентный радикал коммут. кольца A совпадает с пересечением всех простых идеалов

<u>Д-во:</u> Т.к. нильп. эл-т яв-ся делителем нуля, то $\mathrm{rad}(A) \subseteq \bigcap\limits_{I\text{-простой}} I$.

Зам. условие нетеровости в Т.3 можно опустить! См. зам. 3 в § 9.4 из [ВИН]

Предположим, что a не нильпотентен. Тогда можно построить кольцо $A' = A[a^{-1}]$ „дробей" вида $\left[\frac{b}{a^n}\right]$, где $b \in A$ и $n \in \mathbb{N}$, факторизуя мн-во $A \times \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ пар вида (b, a^n) по отношению $(b_1, a^{n_1}) \sim (b_2, a^{n_2}) \Leftrightarrow b_1 a^{n_2} = b_2 a^{n_1}$

и определяя на фактор мн-ве операции

$$\left[\frac{b_1}{a^{n_1}}\right] + \left[\frac{b_2}{a^{n_2}}\right] = \left[\frac{b_1 a^{n_2} + b_2 a^{n_1}}{a^{n_1+n_2}}\right] \text{ и } \left[\frac{b_1}{a^{n_1}}\right]\left[\frac{b_2}{a^{n_2}}\right] = \left[\frac{b_1 b_2}{a^{n_1+n_2}}\right]$$

аналогично определению поля частных целост. кольца.
В силу следствия 2 из т. 2 A' нётерово. Поэтому в A' есть некот. макс. идеал I'. Т.к. a обратим в в A', то $a \notin I'$.

Положим $I = I' \cap A$. По второй т. о гом-змах $A/I \cong A+I'/I' \le A'/I'$. Т.к. A'/I' — поле, то в A/I нет делителей нуля $\Rightarrow$ I — простой идеал в A, который не содержит a ∎

Используя ту же идею, мы докажем еще одну важную теорему.

Пусть A — алгебра над полем K (по умолчанию, ассоц. комм. и с 1). Алгебра A кон. порождена, если она конечно порождена (как кольцо) над K. Нам понадобится след. утверждение, которое мы докажем позже (как следствие леммы Нётер о нормализации).

Предл 5 Если к.п. алгебра A над алг. замкн. полем K сама явл-ся полем, то $A = K$.

Т. 4 (Т Гильберта о нулях в алгебр. форме)

Пусть A – к.п. алгебра над алг. зам. полем K. Тогда $\forall$ ненильпот. эл-та $a \in A$ существует гом-зм $\varphi : A \to K$, для которого $a\varphi \neq 0$.

Д-во: Как и при д-ве Т. 3 строим кольцо (и даже алгебру) $A' = A[a^{-1}]$. Выбираем в A' макс. идеал I' (он не содержит a, т.к. a обратим в A'). Поле A'/I' – к.п. алгебра над $K \underset{\text{предл5}}{\Longrightarrow} A'/I' = K$.

Снова $A/I \leq A'/I'$. Если $\pi : A' \to A'/I' = K$ — канон. гомом, то искомый гомом $\varphi = \pi|_A$