

(2) Полиномиальная алгебра

0. Линейные функции и двойственность
(канонические)

Далее, V — в.п. (чаще всего к.п.) над полем F .

Опр 1 От-е $\alpha: V \rightarrow F$ — линейная ф-ция, если

$$1) \alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y); \quad 2) \alpha(\lambda x) = \lambda \alpha(x) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in F.$$

Множ $\text{Hom}(V, F)$ всех л.н. ф-ций — изоморфо в
в.п. $F(V, F)$ всех ф-ций из V в F .

Опр 2 Пр-во $V^* = \text{Hom}(V, F)$ — сопряженное к V пр-во.

Пусть $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис V и $x = \sum x_i e_i \in V$.

Тогда для $\alpha \in V^*$: $\alpha(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, где $a_i = \alpha(e_i)$.

Набор $e^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ л.н. ф-ций из V^* , опред.
правилом $e^i(x) = x_i$ — базис в V^* , называемый
сопряженным к базису e .

Согр. базисы связаны (и определяются) рав-ми:

$$(*) \quad e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Таким образом, $\dim V = \dim V^* \Rightarrow V \simeq V^*$

Но „хорошего“ (не зависящего от выбора базисов)
изоморфизма нет. Он есть между V и V^{**}

Т.1 От-е $x \mapsto f_x$, где $x \in V$, а $f_x \in V^{**}$ и
опр-ся $f_x(\alpha) = \alpha(x) \quad \forall \alpha \in V^*$, явл-ся изоморфизмом V и V^{**}

Д-во: см. т.5.2.1 из [ВИИ]

Следствие Каждый базис V^* сопр-чен к базису из V .

Далее, мы отождеств. V и V^{**} , см. **КАНОН.** из-за $x \mapsto f_x$
После отождествления мы пишем $\alpha(x)$ вместо $\alpha f_x(x)$:

$$(\dagger\dagger) \quad \alpha(x) = x(\alpha) \quad \forall x \in V, \forall \alpha \in V^*$$

— **принцип двойственности**. Он лежит в основе
Дуализа "частица-волна" в квантовой механике
(подробнее см. [КосМ] в списке литературы).

Упр 1 Если $[x]$ и $[\alpha]$ — строки коор-т x и α в базисах e_i и e^i
то $\alpha(x) = [\alpha][x]^T = [x][\alpha]^T = x(\alpha)$.

Зам. 1 Это верно только в сопряж. базисах!

Зам. 2 Если $\dim V = \infty$, то V не обязат. $\simeq V^*$ и
тем более V^{**} ! См. Зам. 1 из ср. 190 [Вин].

Т.2 Пусть V, U — к.м. в.и. над полем F . Если $A \in \text{Hom}(V, U)$,
то $\exists! A^* \in \text{Hom}(U^*, V^*)$ такое, что $\forall x \in V \quad \forall \alpha \in U^*$

(**) $\alpha(Ax) = (A^* \alpha)x$. Если $A = [A]$ — матрица A ,
то $A^T = [A^*]$ в сопряженных базисах.

Л-во. Единств Пусть $A_1^*, A_2^* \in \text{Hom}(U^*, V^*)$ одн.

св-вом (**). Тогда $\forall x \in V \quad \forall \alpha \in U^* \quad (A_1^* \alpha)(x) =$
 $= \alpha(Ax) = (\alpha_2^* \alpha)(x)$. Так. то верно $\forall x \in V \Rightarrow A_1^* \alpha = A_2^* \alpha$

Поскольку верно $\forall \alpha \in U^* \Rightarrow A_1^* = A_2^*$, и.г.

Существование В сопряж. базисах $\alpha(Ax) = [\alpha][Ax]^T$
 $= [\alpha](A[x]^T) = ([\alpha]A)[x]^T$. Зададим от-е A^*

правиком $[A^*] = [\alpha] A$, оно линейно и $[A^*] = A^T$,
 т.к. $[A^*][\alpha]^T = [A^* \alpha]^T = ([\alpha] A)^T = A^T [\alpha]^T$.
 Кроме того, $(A^* \alpha)(x) = [A^* \alpha][x]^T = ([\alpha] A)[x]^T =$
 $= \alpha(Ax)$ по определению \square

Опр 3 лев. и-е A^* из т. 2 наз-ся **сопряженным** к A ,

т. 3 (св-ва сопр. упр-я):

$$1) (A+B)^* = A^* + B^* \quad 2) (\lambda A)^* = \lambda A^* \quad 3) (AB)^* = B^* A^* \quad 4) E^* = E \quad 5) O^* = O$$

Замечание:
 от выбора
 нормы на $V \rightarrow V^{**}$.

$$6) A^{**} = A \quad (\text{при канон. отожд. } V \text{ и } V^{**})$$

Л-во: $[A^*] = A^T \Rightarrow \dots$ Упр 2 Дов-т т. 3.

Пояснение см. § 5.2 из [ВЧН] и § 7 из [КсМ].

1. Тензорное произведение векторных пр-в

Опр 1 Пусть V_1, \dots, V_p, U — в. п. над полем F

От-е $\varphi: V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow U$ наз-ся **полилинейным** (или **p -линейным**), если оно линейно по каждому из p аргументов (при фикс. остальных).

Мн-во всех таких от-й $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_p; U)$ или $\text{Hom}(V_1, \dots, V_p; U)$ — вект. пр-во над F .

Следо, что $\dim \text{Hom}(V_1, \dots, V_p; U) = \dim V_1 \cdot \dots \cdot \dim V_p \cdot \dim U$.

При $p=1$ мы получаем p -во лин. от-и $\text{Hom}(V, U)$.

При $U=F$ $\text{Hom}(V_1, \dots, V_p; F)$ — p -во **полилинейных**
 ϕ -ф-ий. В частности, $V^* = \text{Hom}(V; F)$ — сопряжен-
ное к V p -во, т. е. p -во линейных ϕ -ф-ий
см. и, 0 (далее в этой лекции).

Среди всех полилинейных от-и p -во V_1, \dots, V_p
имеется в некотором точном смысле универсаль-
ное (см. ниже), его образ и есть тензорное
произведение этих p -во.

Для краткости мы сначала рассмотрим
случай билинейных отображений ($p=2$).

Далее, мы рассмотрим $\mathcal{B} = \text{Hom}(V; W; U)$,
где V, W, U — (к.м.) в.п. над полем F .

Предп. 1 Пусть $\{e_i | i \in I\}$ и $\{f_j | j \in J\}$ — базисы
в.п. V и W соот-но. След. св-ва $\varphi \in \mathcal{B}$ эк-нт:

- 1) $\{\varphi(e_i, f_j) | i \in I, j \in J\}$ — базис $\text{пр-ва } U$,
- 2) каждому $z \in U$ единств. образом прес. φ будет
 $z = \sum_{i \in I} \varphi(e_i, y_i)$, где $y_i \in W$
- 3) каждому $z \in U$ единств. образом прес. φ будет
 $z = \sum_{j \in J} \varphi(x_j, f_j)$, где $x_j \in V$.

Зам. В случае беск. мер. пр-в надо рассм. то
только суммы с кон. числом слагаемых $\neq 0$.

Лемма $(1 \Leftrightarrow 2)$, поскольку $z = \sum_{i,j} z_{ij} \varphi(e_i, f_j)$
 $\Leftrightarrow z = \sum_i \varphi(e_i, y_i)$, где $y_i = \sum_j z_{ij} f_j$.

$(1 \Leftrightarrow 3)$ гом-св алгебраично \square

Следствие СВ-во 1) от-н φ не зависит от
 выбора базисов в V и W .

Опр 2 Тензорный произведение в.н. V и W
 наз-ся в.н. $T = V \otimes W$ вместе с билин. от-н

$\otimes: V \times W \rightarrow T$ по правилу $(x, y) \mapsto x \otimes y$,
 удовн. след. условию: если $\{e_i \mid i \in I\}$ и $\{f_j \mid j \in J\}$ -
 базисы V и W , то $\{e_i \otimes f_j\}$ - базис уп-ва T .
 Из опр. $\Rightarrow \dim T = \dim V \cdot \dim W$. Уточн. $T = V \otimes_F W$.

Теорема 1 Тензорное произведение T уп-в V и W существует и единств. (с точностью до изоморфизма).

Д-во: Сущ. Возьмем в V и W канонич. базисы $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$ и определим билин. от-е $\otimes : V \times W \rightarrow T$ правилом $e_i \otimes f_j = t_{ij}$ (оно не зависит от выбора базисов в силу следствия из упр. 1).

Единств. Пусть (T_1, \otimes_1) и (T_2, \otimes_2) — два тензорных уп-в. От-е базисов $\psi : e_i \otimes_1 f_j \mapsto e_i \otimes_2 f_j$ однозначно определяется по универсальности до изом. зная $\psi : T_1 \rightarrow T_2$.

Пример: $\otimes: F[x] \times F[y] \rightarrow F[xy]$

но ф-ле $(f \otimes g)(xy) = f(x)g(y)$.

$\{x^i \mid i=0.. \infty\}$ - базис $F[x]$ и $\{y^j \mid j=0.. \infty\}$ - базис $F[y]$

При этом $\{x^i \otimes y^j = x^i y^j \mid i, j=0.. \infty\}$ - базис $F[xy]$

но вып 2 $F[xy] = F[x] \otimes F[y]$.

Аналогично, $F[x_1..x_n; y_1..y_n] = F[x_1..x_n] \otimes F[y_1..y_n]$.

Предп 2 $\forall \varphi \in \mathcal{B} = \text{Hom}(V, W; U)$ существует

единств. лине. от-е $\psi: T = V \otimes W \rightarrow U$ такое, что

$$(*) \quad \varphi(xy) = \psi(x \otimes y) \quad \forall x \in V, y \in W.$$

1-во: Достаточно задать ψ на базисных векторах

$\text{кр-базис } T$, полагая $\psi(e_i \otimes f_j) = \varphi(e_i, f_j)$ и проверить
линейность, св-ва

В предыдущем параграфе мы показали, что любой элемент $z \in V \otimes W$ можно представить в виде суммы тензоров $z = \sum_{i,j} z_{ij} (e_i \otimes f_j)$, где $z_{ij} \in F$ (**)

Значит z_{ij} — координаты z относительно базисных тензоров $e_i \otimes f_j$. Если V и W — к.м. н-в-а, то z задается n^2 -ю (z_{ij}) .

Значит $z \in V \otimes W$ называется **разложимым** (или простым тензором), если $\exists x \in V$ и $y \in W$:

$$(***) \quad z = x \otimes y.$$

Упр 1 Если $\dim V, \dim W > 1$, то не всякий $z \in V \otimes W$ разложим. Почему?

Упр 2 Если $z = x \otimes y$ разложим, то это предсказывает. Сфакторизовать можно замену $x \rightarrow \lambda x$, $y \rightarrow \lambda^{-1} y$, $\lambda \in F^\times$.

Важное упражнение тензорного умножения —
операция расширения кольца:

Пусть L — расширение кольца F и V — б. и. над F ,
 $V_L = L \otimes_F V$ — это б. и. над F .

С гр. сопр. кн, его можно рассм-ть как б. и.
над L , начиная с $d(\lambda \otimes v) = \lambda d \otimes v$, где
 $d, \lambda \in L, v \in V$. Можно сказать, что $V \subseteq V_L$
отсюда $v \in V$ и $1 \otimes v \in V_L$.

Если $d e_i (i \in I)$ — базис $V(\text{над } F)$, то $d 1 \otimes e_i (i \in I)$
базис $V_L(\text{над } L)$, но (в этом все время) там
еще и группа базиса, в которых работают

удобнее (кем., над алг. зор ноем).

С гр. сопоиш, ели $\{D_j \mid j \in J\}$ - базис L над F ,
то кинсгн $v \in V_L$ орознитно пресаблаетса
в базе $\sum_j D_j v_j$, где $v_j \in V$. Например,
 $\forall z \in V_{\mathbb{C}}$ имеем $z = x + iy$, где $x, y \in V_{\mathbb{R}}$.

Препз 3 Пусть V, W, X - в. и. над F . Тогда

а) $V \otimes W \cong W \otimes V$,

б) $(V \otimes W) \otimes X \cong V \otimes (W \otimes X)$

1-20; Упр 3. Зам. Убо морфизм, но не равн!

Отображается при помощи изоморфизма из
пред. 3 $(V \otimes W) \otimes X$ и $V \otimes (W \otimes X)$, мы
можем считать тензорное пр-е $V \otimes W \otimes X$
пр-в V, W, X . По индукции это можно согласо-
вать на любое конечное число пр-в V_1, \dots, V_p .

Предл. 4 Тензорное пр-е вида $e_{1i_1} \otimes \dots \otimes e_{pi_i}$,
где e_{ki_k} — базис. вектор пр-ва V_{k_i} , $i=1, \dots, p$,
образуют базис пр-ва $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$.

Д-во: Индукция по числу p \equiv

Отобразив предл. 2 мы получаем след.
осн. критерий тензорной алгебры:

Т. 2 Для любого r -линейного от-я $\psi: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow U$ существует единств. лине. от-я $\psi: V_1 \otimes \dots \otimes V_r \rightarrow U$:

$$(\ast\ast\ast\ast) \quad \psi(x_1, \dots, x_r) = \psi(x_1 \otimes \dots \otimes x_r)$$

Изоморфизм $\text{Hom}(V_1, \dots, V_r; U) \simeq \text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_r; U)$,
определенный в Т. 2 наз-ся **каноническим**.

Пример Пусть сначала $\alpha \in V^*$, $\beta \in W^*$. Определим
двумерную функцию $\alpha \otimes \beta: V \times W \rightarrow F$ правилом

$$(\alpha \otimes \beta)(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$$

Тогда $\otimes: V^* \times W^* \rightarrow \text{Hom}(V, W; F)$ — лине. от-я

При этом, если $\{e^i\} \in V^*$ и $\{f^j\} \in W^*$ — базисы V^* и W^* , то
 $(e^i \otimes f^j)(x, y) = x_i y_j$, где x_i, y_j — коор-ты в-ров x и y

в базисах e_i и f_j . Так как всякая л.л. ϕ -линей
 f на $V \times W$ однозначно выраст. в базе $f(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij} x_i y_j$,
 то $\{e^i \otimes f^j \mid i \in I, j \in J\}$ - базис в $\text{Hom}(V, W; F)$ \Rightarrow
 $\text{Hom}(V, W; F) \cong V^* \otimes W^*$.

Аналогично,

$$\text{Hom}(V_1, \dots, V_p; F) \cong V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^*, \quad (****)$$

Здесь изоморфизм задается ϕ -линей:

$$(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p)(x_1, \dots, x_p) = \alpha_1(x_1) \dots \alpha_p(x_p),$$

где $\alpha_i \in V_i^*$ и $x_i \in V_i$, $i = 1 \dots p$.

Из $(****)$ и $(****)$ \Rightarrow

$$(V_1 \otimes \dots \otimes V_p)^* = V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^*.$$

Упр 4 Пусть $\alpha \in V^*$ и $y \in W$. Проверьте, что
 $\alpha \otimes y : V \rightarrow W$ по правилу $(\alpha \otimes y)(x) = \alpha(x)y, x \in V$,
 — линейное OT-л. Поэтому $\otimes : V^* \times W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$
 — билинейное OT-л. А-те, что
 $V^* \otimes W \simeq \text{Hom}(V, W)$ (хххххххх)

Упр 5 Покажите, что
 $V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^* \otimes U \simeq \text{Hom}(V_1, \dots, V_p; U).$

Упр 3 Пусть $A \in L(V)$, $B \in L(W)$ — л.н.

операторы на V и W над F . Л.н. оператор
 $A \otimes B$ на $V \otimes W$, заданный правилом

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By \quad \forall x \in V, y \in W,$$

НАЗ-СЯ **тензорным произведением** операторов A и B .

Преп 5 ~~4~~) Опр 3 корректно

2) Если $A = (a_{ij}) = [A]$ в базисе $\{e_i \mid i=1 \dots n\}$

$B = (b_{ij}) = [B]$ в базисе $\{f_j \mid j=1 \dots m\}$, то

в базисе $\{e_i \otimes f_j\}$ оператор $A \otimes B$ имеет m -ый

$$[A \otimes B] = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Эта m -я НАЗ-СЯ **тензорным произведением** m -я A и B
и обозн. $A \otimes B$.

Упр 6 Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и μ_1, \dots, μ_m - хар корни A и B (с учетом крат-ти),
то $\lambda_i \mu_j$ - хар корни $A \otimes B$.