

Задачи 16

Теория групп: разрешимые и нильпотентные группы

Теоретический материал: файл AT15n.pdf, § 16.1 и 19.1 из [КМ]; гл. 10 § 2 из [ВИН].

Задачи для домашней работы:

1. Привести пример конечной разрешимой, но не нильпотентной группы наименьшего возможного порядка.

2. Докажите, что группы диэдра D_{2n} (группы симметрий правильного n -угольника) разрешимы при любом n . Есть ли среди них нильпотентные группы?

3*. Пусть $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_2(G) = [G, G]$, и $\gamma_{k+1}(G) = [\gamma_k(G), G]$. Докажите, что

а) группа G нильпотентна (см. опр. 4 из лекции, файл AT16n) тогда и только тогда, когда найдется такое m , что $\gamma_{m+1}(G) = 1$. Точнее, $\gamma_{m+1}(G) = 1 \iff Z_m(G) = G$;

б) группа верхних унитреугольных (все элементы на главной диагонали — единицы) матриц над произвольным полем нильпотентна;

в) группа верхних треугольных матриц над произвольным полем разрешима.