

Задачи 17

Теория групп: теорема Жордана-Гельдера и простые группы

Теоретический материал: файл AT16n.pdf и AT17n.pdf; § 4.4 и § 13 из [КМ]; гл. 10, § 5 из [ВИН].

Задачи для домашней работы:

1. Группа с субнормальным рядом, все факторы которого — циклические группы, называется *полициклической*. Доказать, что

- а) подгруппа и фактор-группа полициклической группы — полициклические;
- б) если H — нормальная подгруппа группы G , и группы H и G/H полициклические, то G тоже полициклическая;
- в) конечная разрешимая группа — полициклическая.

2. Доказать, что с точностью до изоморфизма есть только одна неабелева простая группа порядка 60, последовательно решив следующие задачи:

- а) доказать, что простая группа действует на множестве своих силовских p -подгрупп точно и транзитивно;
- б) доказать (последовательно), что в простой группе порядка 60 а) 6 силовских 5-подгрупп, б) 10 силовских 3-подгрупп, в) 5 силовских 2-подгрупп.
- в) доказать, что простая группа порядка 60 изоморфна знакопеременной группе A_5 .

3. а) Найти порядок группы $PSL_2(\mathbb{F}_q)$, где \mathbb{F}_q — поле из q элементов;

б) показать, что группы A_5 , $PSL_2(\mathbb{F}_4)$ и $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ изоморфны между собой;

в) найти простую группу, порядка больше, чем у A_5 , но меньше, чем у A_6 .

4*. Докажите, что группа $PSU_2(\mathbb{C}) = SU_2(\mathbb{C})/Z(SU_2(\mathbb{C}))$ проста.