

## Задачи 18

### Линейные представления: определения и примеры

Теоретический материал: файл AT18n.pdf; гл. 11, § 1 из [ВИН]; гл. 3, § 1 из [КосЗ].

#### Задачи для домашней работы:

1. Пусть  $V$  — пространство непрерывных функций на вещественной прямой, а  $G$  — аддитивная группа поля вещественных чисел.

а) Показать, что отображение  $\varphi$  из  $G$  в пространство линейных операторов  $L(V)$  пространства  $V$  по правилу  $t \mapsto \varphi_t, t \in \mathbb{R}$ , является линейным представлением группы  $G$ , если  $f(x)\varphi_t = e^t f(x)$ , и не является таковым, если  $f(x)\varphi_t = t f(x)$ .

б) Проверить, что отображение  $\varphi : G \rightarrow L(V)$  по правилу  $t \mapsto \varphi_t, t \in \mathbb{R}$ , есть линейное представление группы  $G$ , если  $f(x)\varphi_t = f(x - t)$ .

в) Будет ли подпространство  $U$  пространства  $V$  инвариантно относительно  $\varphi$  из п. б), если  $U$  — одно из следующих подпространств: подпространство многочленов, подпространство четных функций, подпространство, натянутое на функции  $\sin x$  и  $\cos x$ ?

2. Упр. 4 из AT18n.pdf

3\*. Пусть  $\varphi : G \rightarrow GL(V)$  — линейное представление группы  $G$  на пространстве  $V$  размерности  $n$ . Докажите, что существует линейное представление  $\psi$  группы  $G$  на  $m$ -ой тензорной степени пространства  $V^{\otimes m}$ , для которого

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_m)\psi = v_1\varphi \otimes \dots \otimes v_m\varphi.$$

Это представление единственно с точностью до изоморфизма (и обозначается  $\varphi^{\otimes n}$ ). Покажите, что подпространства симметрических и кососимметрических тензоров пространства  $V^{\otimes m}$  инвариантны относительно  $\varphi^{\otimes n}$ .