Задачи 19

Линейные представления: неприводимость и вполне приводимость

Теоретический материал: файл AT19n.pdf; гл. 11, § 1,2 из [ВИН]; гл. 3, § 1,2 из [Кос3].

Задачи для домашней работы:

1. Пусть $\varphi : G \to GL(V)$ — представление группы G. Доказать, что

а) для любого $v \in V$ линейная оболочка $\langle v(x\varphi) \,|\, x \in G\rangle$ является инвариантным подпространством для представления φ;

б) любой вектор из V лежит в некотором инвариантном подпространстве размерности, не превосходящей $|G|$;

в) минимальное инвариантное подпространство, содержащее вектор $v \in V$, совпадает с $\langle v(x\varphi) \,|\, x \in G\rangle$.

2. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Определим в V представление ρ циклической группы порядка n, порожденной элементом a, полагая $e_i(a\rho) = e_{i+1}$ при $i < n$ и $e_n(a\rho) = e_1$. При $n = 2m$ найти размерность минимального инвариантного подпространства, содержащего векторы:

а) $e_1 + e_{m+1}$;

б) $e_1 + e_3 + \ldots + e_{2m-1}$;

в) $e_1 - e_2 + e_3 - \ldots - e_{2m}$;

г) $e_1 + e_2 + \ldots + e_m$.

3*. Комплексное матричное представление $\varphi : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ группы G называется *унитарным*, если $G\varphi \subseteq \mathrm{GU}_n(\mathbb{C})$, т. е. образ $g\varphi$ каждого элемента $g \in G$ — унитарная матрица. Используя в качестве источника гл. 3, § 2 из [Кос3],

а) докажите, что для конечной группы G всякое ее комплексное линейное представление эквивалентно некоторому ее унитарному представлению;

б) докажите теорему Машке для комплексных представлений, используя утверждение пункта а);

в) решите упр. 1,2 после § 2 гл. 3 из [Кос3].